

14

Teorías de la radiación del campo electromagnético

El campo electromagnético o la luz no es un ente que exista solo de forma independiente. Hemos visto que este puede ser creado por la aceleración de cargas eléctrica debido a la oscilación de dipolos eléctricos y magnéticos, y que a su vez también interacciona con la materia.

Las teorías gauge nos definen como debe ser la estructura del campo electromagnético y su acoplamiento con las cargas de la materia, determinando una interrelación recursiva entre ellos que se mantiene en el tiempo pero que no nos dice nada sobre su origen.

Sin embargo, en la interacción de la carga electrónica de los átomos con el campo electromagnético entran en juego otros procesos adicionales relacionados con la mecánica cuántica de como los electrones en los átomos emiten y absorben energía electromagnética.

Un cuerpo caliente a una temperatura constante (también llamado cuerpo negro) emite y absorbe radiación electromagnética cuando está en equilibrio con un campo electromagnético externo. El entender el espectro de radiación del cuerpo negro sirvió para asentar las bases de la mecánica cuántica de los átomos y de la teoría corpuscular de la luz.

Los coeficiente de absorción y emisión de radiación para la radiación del cuerpo negro predichos primero fenomenológicamente por Einstein, son la guía para entender los procesos básicos de la teoría cuántica y de cómo interacciona un átomo con el campo electromagnético mediante un proceso de intercambio de creación y absorción de fotones de luz.

En este capítulo se exponen las teorías que llevaron a la formulación de la teoría cuántica de la radiación que permitieron hacer el cálculo exacto de los coeficientes de radiación predicho por Einstein.

Veremos también que estas teorías permiten confirmar otras propiedades como el espín o polarización de los fotones, su momento lineal sin una masa, y la cuantización de su energía.

Fluctuaciones de energía de la radiación electromagnética

Según Kirchoff, en una cavidad cerrada de volumen V a cierta temperatura T constante, debe existir en su interior una densidad de energía de radiación por unidad de volumen $u_\omega(T)d\omega$ en el intervalo de frecuencia entre ω y $\omega + d\omega$, que es independiente de la naturaleza de los materiales y de la forma de la cavidad y de cómo se adquiera la temperatura T .

A este tipo de radiación se le denomina también como radiación del cuerpo negro.

La densidad energía total de radiación para todo el espectro de frecuencias vendrá dado por

$$u(T) = \int_0^\infty u_\omega d\omega$$

Si el material se supone que está compuesto por osciladores armónicos lineales con una carga eléctrica ligada, y si se pone que $\bar{\epsilon}_{osc}(T)$ es la energía media por oscilador a la temperatura T , entonces por la física clásica deberá ser

$$u_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{\epsilon}_{osc}(T)$$

Mas adelante se dará una demostración de cómo calcular el coeficiente $\omega^2/\pi^2 c^3$

Por el teorema de la equipartición de la termodinámica clásica, la energía media por oscilador será kT , siendo k la constante universal de Boltzmann

$$k = 1,3810^{-16} \frac{\text{ergios}}{\text{grado}}$$

Según la termodinámica clásica la densidad de energía vendría dada por

$$u_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT$$

Para el límite de bajas frecuencia $\omega \rightarrow 0$ se reproduce la ley experimental de Rayleigh-Jeans, en que la densidad de energía tiende a cero proporcionalmente a T .

En límite de las altas frecuencias $\omega \rightarrow \infty$ la densidad de energía clásica se haría infinita lo que sería físicamente incorrecto. Esta paradoja se conoció con nombre de catástrofe del ultravioleta.

Para resolver esta paradoja, Planck hizo la hipótesis de que los osciladores no pueden tomar cualquier valor de energía, sino solo aquellos que difieren de un múltiplo entero de un valor de energía finito $\mathcal{E}_0$.

Según la teoría de la Boltzmann de la termodinámica clásica, la probabilidad relativa $P(\mathcal{E})$ de que un sistema alcance un estado de energía $\mathcal{E}$ en estado de equilibrio térmico a una temperatura T viene dada por

$$P(\mathcal{E}) \propto e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}}$$

La energía media $\bar{\mathcal{E}}$ que tendrá el sistema será entonces

$$\bar{\mathcal{E}}(T) = \frac{\int_0^\infty \mathcal{E} e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} d\mathcal{E}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} d\mathcal{E}}$$

Para la hipótesis de Planck se pasa de una integral continua en $\mathcal{E}$ a una suma discreta, por lo que la energía media $\bar{\mathcal{E}}(T)$ por oscilador será

$$\bar{\mathcal{E}}_{osc}(T) = \bar{\mathcal{E}}(T) = \frac{\sum_n n \mathcal{E}_0 e^{-\frac{n\mathcal{E}_0}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{n\mathcal{E}_0}{kT}}} = \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\frac{\mathcal{E}_0}{kT}} - 1}$$

La densidad de radiación según lo anterior vendría dada por

$$u_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \bar{\mathcal{E}}(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\frac{\mathcal{E}_0}{kT}} - 1}$$

Planck descubrió con sorpresa que la anterior ecuación concordaba perfectamente con los resultados experimentales si era

$$\mathcal{E}_0 = \hbar\omega$$

donde $\hbar = 2\pi h$ pasó de conocerse como la constante universal de Planck. Por este descubrimiento se le concedió a Planck el Premio Nobel.

La densidad de energía de equilibrio radiada por un cuerpo negro radiante a la temperatura T obedece la ecuación universal

$$u_\omega(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

La zona de bajas frecuencias en que $\omega \rightarrow 0$ se conoce como zona de Reyleigh-Jeans del espectro electromagnético por ser estos quienes primero lo determinaron experimentalmente, y la densidad de energía tiene un comportamiento cuadrático con la frecuencia y lineal con la temperatura que concuerda con la predicciones de la física clásica

$$u_{\omega}(T) \rightarrow \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \quad \frac{\hbar \omega}{kT} \ll 1$$

La zona de altas frecuencias en que $\omega \rightarrow \infty$ se conoce como la zona Wien, donde la densidad de energía decae exponencialmente con la frecuencia

$$u_{\omega}(T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} \quad \frac{\hbar \omega}{kT} \gg 1$$

La densidad de energía total para todo el espectro de frecuencias será

$$u(T) = \int_0^{\infty} u_{\omega} d\omega = \sigma T^4$$

siendo

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5,6810^{-8} \frac{\text{Wattios}}{\text{m}^2 \text{grado}}$$

A σ se la conoce como la constante de Stefan-Boltzmann por ser los primeros que la determinaron experimentalmente.

No fue hasta la teoría de los cuantos de Planck que se pudo determinar σ teóricamente y justificar el comportamiento del espectro electromagnético a altas frecuencias.

Evidentemente $u(T)$ tiene que ser igual a la densidad de energía del campo electromagnético

$$u(T) = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) = \epsilon_0 \vec{E}^2$$

Por lo que el campo eléctrico medio en la cavidad del cuerpo negro viene dada por

$$\overline{E^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} T^4$$

Einstein a partir de estos resultados generalizó la hipótesis de los cuantos de luz, postuló que la radiación siempre interactúa con la materia mediante cuantos discretos de energía $\hbar \omega$ que solo pueden ser intercambiados en múltiplos enteros de estos.

Como resultado de esta hipótesis fue su justificación del efecto fotoeléctrico que le valió el Premio Nobel.

Supuso que la luz estaba formada por fotones de luz de energía $\hbar\omega$ que al incidir sobre una superficie metálica emitía electrones con una energía cinética igual a $\hbar\omega - W_T$, siendo W_T la función de trabajo que representa la energía necesaria que liga el electrón y que es necesario aportar para liberarlo.

La función de trabajo se puede determinar experimentalmente ya que si un electrón de energía $q\phi$ incide sobre el ánodo de un tubo de rayos X, la energía máxima de la radiación será $\hbar\omega_{\text{máxima}} = W_T$

Todos estos resultados condujeron al desarrollo de la primitiva teoría cuántica de antes del año 1913, que se basaba en la hipótesis de que la materia estaba descrita por osciladores armónicos lineales cuyos estados de energía permitidos eran múltiplos enteros de una energía fundamental $\hbar\omega_0$

$$E_n = n\hbar\omega_0$$

Einstein en un rasgo de genialidad calculó las fluctuaciones de la energía de radiación electromagnética del cuerpo negro en equilibrio térmico.

Para ello invirtió la relación termodinámica de Boltzmann, que relaciona el número de estados accesibles $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$ de un sistema con la misma energía $\mathcal{E}$, y que es proporcional a la probabilidad $P(\mathcal{E})$ de ocupación del sistema a la dicha energía, con la entropía $S(\mathcal{E})$ del sistema

$$\mathfrak{B}(\mathcal{E}) = e^{\frac{S(\mathcal{E})}{k}}$$

Se define por $\mathcal{E}(\omega)$ es la energía total de radiación que hay en la cavidad del cuerpo negro de volumen V en intervalo de frecuencias entre ω y $\omega + d\omega$

$$\mathcal{E}(\omega) = V u_\omega(T) d\omega$$

Dividiendo el volumen V en pequeñas volúmenes ΔV_i o celdas, y suponiendo que $\Delta\mathcal{E}_i$ es la fluctuación de energía en la celda ΔV_i , la fluctuación de entropía en cada celda se puede aproximar por un desarrollo en Taylor

$$S_i(\mathcal{E} + \Delta\mathcal{E}_i) = S_i(\mathcal{E}) + \frac{\partial S_i}{\partial \mathcal{E}} \Delta\mathcal{E}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_i}{\partial \mathcal{E}^2} (\Delta\mathcal{E}_i)^2$$

siendo la entropía total del sistema

$$S = \sum_i S_i$$

En el equilibrio como no hay una fluctuación neta de energía será

$$\sum_i \Delta \mathcal{E}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad S = S(\bar{\mathcal{E}}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{\mathcal{E}}^2} \sum_i (\Delta \mathcal{E}_i)^2$$

de forma que será

$$\mathfrak{W} \propto e^{-\frac{\sum_i (\Delta \mathcal{E}_i)^2}{2\sigma^2}}$$

y para una celda individual

$$\mathfrak{W}_i \propto e^{-\frac{(\Delta \mathcal{E}_i)^2}{2\sigma^2}}$$

por lo que las fluctuaciones de energía en las celdas sigue una distribución gaussiana con una varianza

$$\sigma^2 = -\frac{k}{\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{\mathcal{E}}^2}}$$

De la densidad de energía de la radiación del cuerpo negro

$$u_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \mathcal{E}_{osc}(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} + 1}$$

se puede despejar la temperatura T

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{\hbar\omega} L_n \left(\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 u_\omega} + 1 \right)$$

Utilizando la relación termodinámica

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial \bar{\mathcal{E}}}$$

se obtiene

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{\mathcal{E}}} = \frac{k}{\hbar\omega} L_n \left(\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 u_\omega} + 1 \right) = \frac{k}{\hbar\omega} L_n \left(\frac{\hbar\omega^3 V d\omega}{\pi^2 c^3 \bar{\mathcal{E}}(\omega)} + 1 \right)$$

La segunda derivada de la entropía se puede calcular directamente obteniéndose

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{\mathcal{E}}^2} = -\frac{k}{\hbar\omega} \frac{1}{\left(\frac{\hbar\omega^3 V d\omega}{\pi^2 c^3 \bar{\mathcal{E}}(\omega)} + 1 \right)} \frac{\hbar\omega^3 V d\omega}{\pi^2 c^3 \bar{\mathcal{E}}^2(\omega)} \equiv -\frac{k}{\sigma^2}$$

De esta forma se obtiene que la fluctuación de energía en la cavidad del cuerpo negro cumple con la ecuación estadística

$$\frac{\sigma^2}{\bar{\mathcal{E}}^2} = \frac{\hbar\omega}{\bar{\mathcal{E}}} + \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2 V d\omega}$$

que también se puede escribir como

$$\sigma^2 = \overline{\mathcal{E}^2} - \bar{\mathcal{E}}^2 = \left(\hbar\omega u_\omega + \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2} u_\omega^2 \right) V d\omega$$

donde por $\bar{\mathcal{E}}$ designamos la energía media en la cavidad en el intervalo de frecuencias entre ω y $\omega + d\omega$.

Es habitual también escribir también las ecuaciones en función de la frecuencia absoluta $\nu = \omega/(2\pi)$, existiendo la relación

$$u_\omega d\omega = u_\nu d\nu$$

Teoría fenomenológica de la radiación electromagnética

Einstein observó que los términos de desviación estándar de las fluctuaciones de la energía de radiación procedían de fenómenos con significados muy distintos.

El primer término procede de la contribución del espectro procedente de la zona Wien para las altas frecuencias en que se considera que la radiación electromagnética está formada de fotones de energía $\hbar\omega$, siendo entonces

$$\frac{\sigma_{Wien}^2}{\bar{\mathcal{E}}^2} = \frac{\hbar\omega}{\bar{\mathcal{E}}} = \frac{1}{\bar{N}}$$

donde $\bar{N}$ es el número medio de fotones en el volumen V .

Este comportamiento es el mismo que la fluctuación estadística del número de partículas respecto a su valor medio dentro de una celda cuando existe equilibrio térmico entre ellas, y por esta razón se puede suponer que los fotones se comportan como si fuesen un gas de partículas sin interacción en equilibrio térmico.

El segundo término de la desviación estándar de la energía procede de la parte del espectro de Rayleigh-Jeans para bajas frecuencias.

Si se considera que la radiación electromagnética del cuerpo negro está confinada en un cubo cuadrado de lado L , las componentes del campo electromagnético serán funciones estacionarias que se anulan en las caras del cubo.

Los significados del campo electromagnético

Si por $a(\vec{x}, t)$ representamos cualquier componente del campo electromagnético será

$$a(\vec{x}, t) = a_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) e^{-i\omega t}$$

Como $a(\vec{x}, t)$ debe verificar la ecuación de ondas se tiene que cumplir

$$\frac{L^2}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^2} = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = R^2$$

donde n_x, n_y, n_z son números enteros positivos, que definen los posibles estados o modos de vibración.

Cuando los n_i son muy grandes y R tiende a un valor muy elevado, el sumatorio para todos los modos de vibración se puede aproximar por una integral que se extiende a un octavo del volumen de una esfera de radio R , con lo que se obtiene que el número de modos con una frecuencia menor que ω viene dado por

$$s(\omega) = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{\pi}{3} \left(\frac{L\omega}{\pi c} \right)^3$$

donde el 2 procede de los posibles estados de polarización del campo electromagnético.

El número de modos de vibración $n(\omega)d\omega$ que hay en el intervalo entre ω y $\omega + d\omega$ será entonces

$$n_R dR = n(\omega) d\omega = \frac{ds(\omega)}{d\omega} d\omega = \frac{L^3}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega = \frac{8\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu$$

siendo $n_R dR = n_\omega d\omega = n_\nu d\nu$

Por el teorema de equipartición de la termodinámica clásica, cada modo de oscilación tiene asociado adquiere en equilibrio térmico una energía promedio igual a kT , por lo que la energía promedio en el intervalo de energía entre ω y $\omega + d\omega$ en el volumen V será

$$V u_\omega d\omega = n_\omega kT d\omega = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} kT d\omega$$

Por tanto el segundo término de las desviación estándar de la fluctuación de energía se puede escribir como

$$\frac{\sigma_{RJ}^2}{\bar{\epsilon}^2} = \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2 V d\omega} = \frac{1}{n_\omega d\omega} = \frac{1}{N_m(\omega)}$$

Donde $N_m(\omega)$ es el número de modos entre ω y $\omega + d\omega$

Por tanto, la fluctuación σ_{RJ} corresponde al comportamiento undulatorio de la luz y σ_{Wien} procede del comportamiento como partículas a altas frecuencias.

Sin embargo la fluctuación de la energía es la suma de las dos componentes

$$\sigma^2 = \sigma_{Wien}^2 + \sigma_{RJ}^2$$

indicando que los aspectos ondulatorios y de partículas de la radiación electromagnética son independientes y ambos contribuyen a las fluctuaciones totales de la energía.

Einstein también calculo las fluctuaciones de presión en una superficie que se comporta como un espejo para las frecuencias entre ω y $\omega + d\omega$ y como absorbente perfecto para el resto del espectro, obteniendo una contribución similar de dos términos que se pueden interpretar en una forma análoga a lo anterior.

Detrás de todos estos comportamientos está la constante de Planck que como vemos nos define también como afecta la interacción de la radiación electromagnética con la materia,

Sin embargo, la física clásica no nos arroja ninguna interpretación sobre el valor y significado de la constante de Planck.

Los anteriores resultados abrieron un debate entre Einstein y Planck sobre la interpretación atomista de la radiación y las inconsistencias con las ecuaciones de Maxwell.

El éxito también de Einstein en la determinación de los calores específicos de los sólidos dotó a la teoría cuántica de la radiación de Planck de un significado más profundo.

El que la energía de los electrones emitidos por la luz en el efecto fotoeléctrico sea proporcional a la frecuencia de la energía incidente pero independiente de la intensidad de la luz, ya que estos aparecen instantáneamente y con una baja intensidad duraría varias horas almacenar la energía equivalente $\hbar\omega$, son resultados que confirman la teoría corpuscular de los fotones de Einstein que son irreconciliables con la teoría electromagnética de Maxwell. Además estos resultados confirman que cada fotón de energía $\hbar\omega$ interacciona con un solo electrón cada vez.

Extendiendo esta hipótesis Bohr formuló que un átomo solo puede absorber o emitir fotones con una energía igual a la diferencia entre sus estados energéticos $\mathcal{E}_i$ y $\mathcal{E}_j$ entre los que se produce la transición de los electrones.

En la absorción el electrón pasa del estado de energía $\mathcal{E}_j$ al $\mathcal{E}_i$ absorbiendo un fotón.

$$\hbar\omega = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j \quad \mathcal{E}_i > \mathcal{E}_j$$

En la emisión espontánea el electrón pasa del estado de energía $\mathcal{E}_i$ superior a otro menor $\mathcal{E}_j$ emitiendo un fotón de energía $\hbar\omega$.

La probabilidad de que se emita un fotón de forma espontánea en un intervalo de tiempo dt se supone que viene dada por una expresión de la forma

$$dP_{e,e} = A^{i \rightarrow j} dt \quad \text{emisión espontánea}$$

que sigue una ley estadística similar al decaimiento radioactivo en que el coeficiente de la probabilidad por unidad de tiempo es constante, si se supone una invarianza temporal.

De igual forma en que un oscilador clásico puede ganar y perder energía dependiendo de la diferencia de fase de la excitación respecto al movimiento del oscilador, se puede producir una absorción o una emisión inducida por la excitación del campo electromagnético en los electrones del átomo.

Es razonable suponer que la probabilidad es proporcional a la densidad de energía del campo electromagnético u presente a la frecuencia ω para la cual tiene lugar las transiciones de energía $\hbar\omega = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$ de los electrones.

$$P_{a,i} = u_{\omega} B^{j \rightarrow i} dt \quad \text{absorción inducida}$$

$$P_{e,i} = u_{\omega} B^{i \rightarrow j} dt \quad \text{emisión inducida}$$

Veremos más adelante que esta hipótesis encierra otros significados profundos sobre la indistinguibilidad de las partículas.

Las constantes $A^{i \rightarrow j}$ y $B^{i \rightarrow j}$ se conocen como los coeficientes de Einstein, y calculó sus relaciones mediante argumentos termodinámicos.

De acuerdo con la teoría de Boltzmann, la probabilidad de que un estado con energía $\mathcal{E}_i$ sea ocupado a una temperatura T en equilibrio termodinámico viene dada por

$$P_i = g_i e^{-\frac{\mathcal{E}_i}{kT}}$$

donde g_i es el número de estados degenerados que tienen la misma energía $\mathcal{E}_i$.

En un cuerpo negro radiante en equilibrio termodinámico, la cantidad de energía absorbida y emitida de radiación deberá ser la misma, por lo que se verifica el balance de energía

$$g_j e^{-\frac{\mathcal{E}_j}{kT}} u B^{j \rightarrow i} = g_i e^{-\frac{\mathcal{E}_i}{kT}} (u_{\omega} B^{i \rightarrow j} + A^{i \rightarrow j})$$

Como $u \rightarrow \infty$ crece monótonamente cuando $T \rightarrow \infty$, Einstein obtuvo a partir de la relación anterior que

$$B_{j \rightarrow i} \equiv B_{i \rightarrow j}$$

y que además deberá verificarse para la densidad de energía la ecuación

$$u_{\omega} = \frac{A^{i \rightarrow j}}{B^{j \rightarrow i}} \frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_j)}{kT}} - 1}$$

que debe corresponder con la ley de radiación de Planck.

En el límite de las altas frecuencias $\hbar\omega \gg kT$, empleando la aproximación de Wien para la densidad de radiación, se obtiene la igualdad

$$u_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} = \frac{A^{i \rightarrow j}}{B^{j \rightarrow i}} e^{-\frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_j)}{kT}}$$

de la que se deduce las relaciones

$$\hbar\omega \equiv \varepsilon_i - \varepsilon_j$$

$$A^{i \rightarrow j} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B^{j \rightarrow i}$$

Aunque esta demostración fue realizada por Einstein de forma fenomenológica a partir de argumentos termodinámicos, las constantes $A^{i \rightarrow j}$ y $B^{j \rightarrow i}$ son muy importantes en física y pueden ser determinados de forma exacta mediante la mecánica cuántica lo que confirmó sus predicciones.

Aunque Einstein nunca aceptó los postulados de la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica y siempre defendió la causalidad en la física diciendo que Dios no juega a los dados, sin embargo fue el primero en emplear argumentos basados en la teoría de probabilidades para determinar los parámetros de absorción y emisión de la radiación mediante fotones.

El que los fotones también tengan un momento $\frac{\hbar\omega}{c}$ en alguna dirección hace inevitable la cuantificación de la radiación, que a diferencia de las teorías clásicas en que las variables de energía y momento cambian de forma continua, en los procesos cuánticos aparecen siempre de forma discontinua e indivisible.

La existencia de un momento $\frac{\hbar\omega}{c}$ para los fotones de la radiación implica que existe una presión P_r de radiación si los fotones son considerados de forma similar a un gas de partículas

$$P_r = \frac{u}{3}$$

donde el 3 se debe al promedio por las tres direcciones del espacio.

Considerando que

$$u(T) = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) = \epsilon_0 \vec{E}^2$$

Si tomamos el gauge de Coulomb en que el potencial vector es un campo vectorial transversal solenoidal

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_T$$

con la condición de transversalidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T = 0$$

Siguiendo a Dirac, el hamiltoniano se puede escribir de la forma

$$H = H_0 + H_c + H_{int}$$

Siendo H_0 el hamiltoniano de un átomo libre, H_c es el hamiltoniano del campo electromagnético libre, y H_{int} es el hamiltoniano de la interacción del campo electromagnético con los electrones del átomo.

En la primera versión de la mecánica cuántica desarrollada por Heisenberg y Jordan, consideraban que los procesos electromagnéticos en el vacío pueden ser representados por una superposición de ondas planas. El campo eléctrico lo representaron como

$$E = E_{ij} e^{i\omega_{ij}(\frac{x}{c} - t)}$$

En la analogía de los electrones como osciladores, la energía

$$E_i = n_i \hbar \omega$$

corresponde a un estado n_i del oscilador con un cuanto a dicha frecuencia.

Bohr estableció el principio de correspondencia que postula que las leyes de la cuántica cuando están implicados procesos físicos con muchos cuantos deben tender en promedio a las leyes de la mecánica clásica.

Este principio de correspondencia es el que hace que el modelo de osciladores radiando de Planck y Einstein concuerden con los resultados experimentales macroscópicos del electromagnetismo clásico cuando el número de fotones emitidos y absorbidos es grande.

Dirac reinterpretó estos resultados con lo que se conoce como la segunda cuantificación, en que n_i no se refiere a un solo cuanto sino a n_i partículas de fotones.

El procedimiento de la segunda cuantificación es similar al de las ondas estacionarias en una cuerda de longitud l vibrando con sus extremos fijos, en que el desplazamiento vertical $y(x, t)$ en un punto x en el instante de tiempo t se puede escribir de la forma

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

que se reduce a un conjunto infinito de osciladores sin acoplar con coordenadas $q_k(t)$. El hamiltoniano en este caso se puede identificar con la energía total

$$H = \frac{1}{2} \sum_i (p_i^2 + \omega^2 q_i^2)$$

donde p_i es el momento conjugado de q_i .

Se demuestra en mecánica clásica que este Hamiltoniano se puede reducir a una forma diagonal

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right)$$

Ya vimos también que el campo electromagnético se puede asimilar a un campo de osciladores con infinito grados de libertad. Dirac postuló que cuando esta solo presente el campo electromagnético, el hamiltoniano para los fotones que constituyen la radiación se puede asociar de igual forma como campo infinito de osciladores

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_i (p_i^2 + \omega^2 q_i^2)$$

donde ahora p_i y q_i son operadores que verifican la relaciones de conmutación

$$[q_i, p_j] \equiv (q_i p_j - p_j q_i) = \hbar \delta_{ij}$$

$$[q_i, q_j] \equiv (q_i q_j - q_j q_i) = 0$$

$$[p_i, p_j] \equiv (p_i p_j - p_j p_i) = 0$$

Dirac introdujo los operadores de aniquilación y creación de fotones

$$a = \frac{\omega q + ip}{\sqrt{2\hbar\omega}} \quad \text{y} \quad a^+ = \frac{\omega q - ip}{\sqrt{2\hbar\omega}}$$

que verifican las relaciones de conmutación

$$[aa^+] = 1$$

de forma que el hamiltoniano se reduce a la expresión

$$H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right)$$

Una representación matricial que diagonaliza el hamiltoniano viene dada por

$$a_{n,n+1} = a^+_{n+1,n} = \sqrt{n+1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

de forma que será

$$H = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

En la representación de ondas planas, los fotones se pueden considerar como estados con un momento $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ y una frecuencia $\omega = c|\vec{k}|$.

Si $\sigma = 1, 2$ representa las posibles polarizaciones transversales, la transcripción a la mecánica cuántica se hace mediante la correspondencia

$$a, a^+ \rightarrow a_{\vec{k}\sigma}, a^+_{\vec{k}\sigma}$$

donde a representa el operador que crea un fotón $(\vec{k}, \sigma)$ y $a^+_{\vec{k}\sigma}$ representa su operador de aniquilación.

El operador hamiltoniano toma la expresión diagonal

$$H_{e.m} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar\omega \left(a^+_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

cumpléndose

$$[a_{\vec{k}\sigma}, a^+_{\vec{k}'\sigma'}] = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

$$[a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}] = 0$$

$$[a^+_{\vec{k}\sigma}, a^+_{\vec{k}'\sigma'}] = 0$$

En la representación matricial de los operadores

$$(a_{\vec{k}\sigma})_{n_{\vec{k}\sigma}, n_{\vec{k}\sigma}+1} = (a^+_{\vec{k}\sigma})_{n_{\vec{k}\sigma}+1, n_{\vec{k}\sigma}}$$

el hamiltoniano toma la expresión diagonal

$$H_{e.m} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar\omega \left(n_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

Teoría cuasiclásica de la radiación electromagnética

Mediante argumentos meramente termodinámicos Wien demostró que la densidad de radiación del cuerpo negro en equilibrio deberá ser una función universal de la forma

$$u_{\omega}(T) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right)$$

expresión a la que se llega también mediante argumentos de análisis dimensional.

Si se integra para todas frecuencias se obtiene la relación de Stephan-Boltzmann

$$u(T) = \sigma T^4$$

Sin embargo la determinación exacta de la función f y de σ requiere como hemos visto de otras teorías más complejas.

Supondremos de acuerdo con Planck, que las paredes de la cavidad del cuerpo negro son superficies reflectoras perfectas, constituida por osciladores lineales en que una partícula de masa m y de carga q realiza oscilaciones forzadas en un campo electromagnético de radiación según la ecuación del movimiento armónico postulada con la teoría del electrón de Lorentz

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} E_x$$

supuesto un campo eléctrico oscilatorio en la dirección del eje x

$$\vec{E} \sim E_x e^{i\omega t}$$

y donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia propia del oscilador, y γ es el coeficiente de amortiguamiento.

Para un campo eléctrico oscilatorio la solución de la ecuación de movimiento también será oscilatoria $x \sim x_0 e^{i\omega t}$ con lo que la ecuación de movimiento se reduce a la expresión

$$x_0 = \frac{q}{m} \frac{E_x}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

La potencia media P_e suministrada a al oscilador será

$$P_e = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} qE \frac{dx}{dt} dt = m\gamma \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = m\gamma \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Denominaremos el promedio $\bar{f}$ de una función $f(t)$ respecto del tiempo como

$$\bar{f} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) dt$$

La energía radiada por unidad de tiempo para una carga oscilante ya vimos que viene dada por

$$S_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \overline{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \omega^2 \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

En equilibrio la potencia suministrada y la radiada deben ser iguales

$$P_e = S_{rad}$$

de lo que se obtiene el coeficiente de amortiguamiento

$$\gamma(\omega) = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m}$$

Ya vimos anteriormente que una carga por efecto de la radiación de energía sufre una fuerza efectiva de frenado

$$F_r = \gamma m \frac{dx}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3x}{dt^3}$$

El coeficiente de amortiguamiento está relacionado γ con la anchura espectral y el tiempo τ de decaimiento de la radiación

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

Para las frecuencias ópticas del espectro electromagnético se verifica

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{3}{2} \frac{4\pi\epsilon_0 m c^2}{\frac{c}{\omega}} = \frac{r_e}{\lambda} \approx \frac{10^{-13}}{10^{-5}} \approx 10^{-8} \ll 1$$

donde r_e es radio clásico del electrón.

La corriente de conducción viene definida por

$$\vec{J} = Nq\vec{v} = N \frac{q^2}{m} \frac{i\omega E_x}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

siendo N el número de cargas por unidad de volumen.

De la ecuación de de Maxwell para ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

se obtiene

$$\epsilon = \epsilon_0 + N \frac{q^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Se define el índice refracción complejo como

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = n - i\kappa = \sqrt{n^2 + \kappa^2} e^{-i\varphi}$$

La ecuación de ondas para la propagación del campo electromagnético admite una solución de la forma

$$E_x = E_0 e^{-i\omega \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \frac{z}{c} - t \right)} = E_0 e^{-\frac{\omega \kappa z}{c}} e^{-i\omega \left(n \frac{z}{c} - t \right)}$$

$$cB_y = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} e^{-i\omega \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \frac{z}{c} - t \right)} = E_0 (n^2 + \kappa^2) e^{-\frac{\omega \kappa z}{c}} e^{-i\omega \left(n \frac{z}{c} - t + \varphi \right)}$$

Esto también se puede ver de otra forma. Si suponemos que los electrones de los átomos constituyentes del medio dieléctrico oscilan elásticamente respecto a una carga fija de signo opuesto, de forma que en su posición de equilibrio el medio es neutro, la densidad dipolar por unidad de volumen será proporcional a su desplazamiento respecto al equilibrio

$$\vec{P} = Nq\vec{x}$$

por lo que en presencia de una campo eléctrico, se verificará la ecuación del oscilador armónico amortiguado forzado

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0^2 \right) \vec{P} = \frac{Nq}{m} \vec{E}$$

De las ecuaciones de Maxwell de para la de de Ampère y de Faraday

$$\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}$$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

se obtiene después de eliminar $\vec{H}$, derivando la primera ecuación respecto al tiempo y tomando el rotacional de la segunda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\epsilon_0 \mu_0 \vec{E} + \mu_0 \vec{P}) = -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 \vec{E}$$

o también

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = -\mu_0 \vec{P}$$

Teniendo en cuenta la ecuación dinámica para la polarización, si multiplicamos esta última ecuación por el operador $(\partial^2/\partial t^2 + \gamma \partial/\partial t + \omega_0^2)$, obtenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0^2 \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} + \frac{\mu_0 N q^2}{m} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Esta ecuación para la propagación del campo electromagnético, admite una solución de la forma

$$E_x = E_0 e^{-i\omega \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0 c}} t - z \right)}$$

que no lleva otra vez a la anterior relación de constitución para la constante dieléctrica

$$\epsilon = \epsilon_0 + N \frac{q^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

El vector Poynting para el flujo de energía promediado en el tiempo nos dará el flujo medio de energía que se propaga en la dirección z

$$S_z = \vec{E} \wedge \vec{H} = c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \frac{2\omega\kappa}{c} z$$

La reducción de energía por absorción de la onda electromagnética al propagarse verifica entonces la relación

$$dS_z = -\frac{2\omega\kappa}{c} S_z dz$$

Si $|\epsilon/\epsilon_0 - 1| \ll 1$ como sucede en un gas rarificado

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right)$$

y se podrá aproximar

$$n \approx 1 + \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)}$$

$$\kappa \approx \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)}$$

El flujo de energía variara como

$$dS_z = -\frac{2\omega\kappa}{c}S_z dz = -\frac{Nq^2}{c\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} S_z(\omega) dz$$

Puesto que Ndz es el número de átomos en dz por unidad de área la densidad de energía absorbida por unidad de tiempo por cada oscilador será

$$\frac{q^2}{c\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} S_z$$

Si u_ω es la densidad de energía de la radiación incidente será $c u_\omega = S_z(\omega)$

Puesto que para un oscilador lineal vibrando en una sola dirección será solo será efectiva para su absorción una tercera parte de la energía incidente, tendremos que la energía absorbida por cada oscilador será

$$\mathcal{E}_{abs}(\omega) = \frac{q^2}{3\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} u_\omega$$

Si la frecuencia ω es próxima a la frecuencia propia ω_0

$$\omega = \omega_0 + \Delta \quad \frac{\Delta}{\omega_0} \ll 1$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 \approx -2\omega_0\Delta$$

Entonces $n - 1$ tiene un máximo para $\Delta = \frac{\gamma}{2}$ y un mínimo en $\Delta = \gamma/2$, y κ tiene un máximo agudo en ω_0 .

Entre esto dos valores el índice n decrece por lo que se denomina región de dispersión anómala.

Se puede comprobar que al ser $\gamma \ll 1$ una aproximación a la de la delta de Dirac es

$$\delta(\omega - \omega_0) \approx \frac{2}{\pi} \frac{\gamma\omega^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}$$

La energía absorbida por intervalo de frecuencias se podrá entonces aproximar por

$$\mathcal{E}_{abs}(\omega) = \frac{q^2}{3\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} u_\omega \approx \frac{\pi q^2}{6\epsilon_0 m} \delta(\omega - \omega_0) u_\omega$$

Si se integra a todo el espectro de frecuencias se obtiene que la energía absorbida por un oscilador es

$$\mathcal{E}_{abs} = \frac{\pi q^2}{6\epsilon_0 m} u_{\omega_0}$$

que no depende del coeficiente γ de amortiguamiento.

Consideremos ahora que el flujo de energía incidente se extiende sobre una región finita del espectro.

En la representación de Fourier el campo eléctrico se puede representar como

$$E_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$E_x(-\omega) = E_x^*(\omega)$$

con lo que la solución de la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_x(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} e^{-i\omega t} d\omega$$

Suponiendo que $E_x(t)$ difiere de cero en el intervalo de tiempo entre $t = -\frac{t_0}{2}$ y $t = \frac{t_0}{2}$ con $t_0 \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\overline{E_x^2} = \frac{1}{t_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(\omega) e^{-i\omega t} E_x^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega d\omega dt = \frac{1}{t_0} \int_{-\infty}^{\infty} |E_x(\omega)|^2 d\omega$$

En adelante llamaremos

$$E_\omega^2 = \frac{1}{t_0} |E_x(\omega)|^2 \quad \overline{E_x^2} = \int_0^\infty E_\omega^2 d\omega$$

De igual forma calculamos el promedio de la posición

$$\overline{x^2} = \frac{q^2}{m^2} \int_0^\infty \frac{E_\omega^2}{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)} d\omega$$

Puesto que $\gamma \ll \omega_0$ será

$$(\omega - \omega_0)^2 (\omega + \omega_0)^2 + \gamma^2 \omega^2 \approx 4\omega_0^2 (\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2 \omega_0^2$$

y la amplitud de oscilación promedio será

$$\overline{x^2} \approx \frac{q^2}{m^2 \omega_0^2} \int_0^\infty \frac{E_\omega^2}{4(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega \approx \frac{q^2}{m^2 \omega_0^2} \frac{\pi}{2\gamma} E_{\omega_0}^2$$

Si u_ω es la densidad de energía, al ser la radiación isotrópica al promediar en las tres direcciones del espacio se obtiene

$$u_\omega = 3\varepsilon_0 E_\omega^2$$

Como la energía media del oscilador viene dada por

$$\bar{\varepsilon}_{osc} = m\omega_0^2 \overline{x^2} = \frac{\pi q^2}{2\gamma m} E_{\omega_0}^2$$

podemos entonces reescribir la densidad de energía en función de la energía de los osciladores

$$u_\omega = \frac{6\varepsilon_0 m}{\pi q^2} \gamma \bar{\varepsilon}_{osc} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{\varepsilon}_{osc}$$

Si no existiera excitación externa, la radiación emitida por una carga oscilante debe ser igual a la energía que pierde el oscilador por unidad de tiempo

$$S_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \overline{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2} = \gamma \bar{\varepsilon}_{osc} \equiv -\frac{d\bar{\varepsilon}_{osc}}{dt}$$

por lo que la energía del oscilador disminuiría con el tiempo con una constante de tiempo τ

$$\bar{\varepsilon}_{osc}(t) = \bar{\varepsilon}_{osc}(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

siendo

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

Como existe un equilibrio termodinámico la radiación emitida por el oscilador debe ser igual a la radiación absorbida por unidad de tiempo para cada frecuencia característica

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_{abs}}{dt} = S_{rad} = \frac{\pi q^2}{6\varepsilon_0 m} u_\omega$$

En la aproximación clásica, por el teorema de equipartición de la termodinámica clásica, cada oscilador lineal que representa un grado de libertad, tomará en promedio una energía $\bar{\varepsilon}_{osc} = kT$, y será

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{\varepsilon}_{osc} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT$$

que es la ley de Rayleigh-Jeans para la radiación en la zona del espectro de bajas frecuencias.

Los significados del campo electromagnético

Con la teoría de los cuantos de Planck e Einstein la energía media de cada oscilador será

$$\bar{\epsilon}_{osc} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} + 1}$$

y la densidad de energía en función de la temperatura vendrá dada por

$$u_{\omega}(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Como ya vimos el número de estados $n(\omega)$ entre ω y $\omega + d\omega$ viene dado por

$$n(\omega)d\omega = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

por lo que en el equilibrio termodinámico deberá ser

$$Vu_{\omega}d\omega = \bar{\epsilon}_{osc}n(\omega)d\omega \equiv \frac{\epsilon_0}{2}(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2) = g\vec{E}^2_0$$

lo que nos confirma que la radiación electromagnética puede ser asimilada a un campo de osciladores lineales.

Efecto Faraday. Rotación del plano de polarización de la luz en un campo magnético

La teoría clásica del electrón de Lorentz, permite calcular el efecto predicho por Faraday de la rotación del plano de polarización de una onda electromagnética al atravesar un medio dieléctrico en un campo magnético externo B_e , que es mucho más intenso que el de la onda electromagnética.

Según la teoría del electrón de Lorentz, las cargas en el medio se moverán ahora de acuerdo con la ecuación del oscilador armónico amortiguado forzado

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)\vec{x} = \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{B}_e\right)$$

Si suponemos que $\vec{B}_e$ es constante y dirigido en la dirección x de propagación de la onda, la anterior ecuación se puede escribir explícitamente como un par de ecuaciones acopladas

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x = \frac{q}{m}\left(E_x + \frac{d\vec{y}}{dt} B_e\right)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)y = \frac{q}{m}\left(E_y - \frac{d\vec{x}}{dt} B_e\right)$$

Se define ahora

$$x_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} x \pm iy \quad y \quad E_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} E_x \pm iE_y$$

con lo que las dos anteriores ecuaciones se pueden reducir a dos ecuaciones complejas desacopladas

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \pm \frac{q}{m} B_e\right)x_{\pm} = \frac{q}{m} E_{\pm}$$

Si suponemos que la solución de estas ecuaciones es del tipo

$$E_{\pm} = E_{\pm} e^{-i\omega \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{\pm}}{\varepsilon_0}} t\right)}$$

entonces por sustitución directa, obtenemos que $\varepsilon_{\pm}$ viene dado por

$$\varepsilon_{\pm}(\omega) = \varepsilon_0 + N \frac{q^2}{m} \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega \pm \frac{q}{m} B_e \omega\right)}$$

Al igual que antes, se puede definir el índice de refracción complejo. Se define el índice refracción complejo como

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_{\pm}}{\varepsilon_0}} = n_{\pm} - i\kappa_{\pm} = \sqrt{n^2 + \kappa^2} e^{-i\varphi}$$

siendo

$$n_{\pm} \approx 1 + \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\left(\omega_0^2 \pm \frac{q}{m} B_e \omega - \omega^2\right)}{\left(\left(\omega_0^2 \pm \frac{q}{m} B_e \omega - \omega^2\right)^2 + \gamma^2 \omega^2\right)}$$

$$\kappa_{\pm} \approx \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{\left(\left(\omega_0^2 \pm \frac{q}{m} B_e \omega - \omega^2\right)^2 + \gamma^2 \omega^2\right)}$$

Para simplificar supondremos que no hay amortiguamiento $\gamma = 0$, por lo que será $\kappa_{\pm} = 0$ y

$$n_{\pm} \approx 1 + \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{q}{m} B_e \omega - \omega^2}$$

y el campo eléctrico se puede describir como

$$E_{\pm} = E_0 e^{-i\omega \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{\pm} z}{\varepsilon_0 c}} t \right)} = E_0 e^{-i\omega \left(\frac{z}{c} n_{\pm} t \right)} = E_0 e^{-i\omega \left(\frac{z}{2c} (n_{+} + n_{-}) \pm \frac{z}{2c} (n_{+} - n_{-}) - t \right)}$$

y por tanto, será

$$E_x = \frac{E_{+} + E_{-}}{2} = E_0 e^{-i\omega \left(\frac{z}{2c} (n_{+} + n_{-}) - t \right)} \cos \left(\frac{\omega z}{2c} (n_{+} - n_{-}) \right)$$

$$E_y = \frac{E_{+} - E_{-}}{2} = E_0 e^{-i\omega \left(\frac{z}{2c} (n_{+} + n_{-}) - t \right)} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega z}{2c} (n_{+} - n_{-}) \right)$$

Debido a la presencia de B_e , vemos que es $n_{+} \neq n_{-}$.

Si suponemos que en $z = z_0$ es $E_y = 0$, entonces en $z = z_0 + \Delta z$ el plano de polarización habrá rotado el ángulo

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{2c} (n_{+} - n_{-}) \Delta z$$

El factor que multiplica a Δz se define como la constante de Verdet, que define el ángulo de rotación de la polarización por unidad de distancia y de campo magnético

$$V = \frac{\Delta\varphi}{\Delta z H_e} = \frac{\omega}{2c} (n_{+} - n_{-}) \approx - \frac{N u q^3}{2 n \varepsilon_0 m^2} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

Debe tenerse en cuenta que $q = -e$ es la carga del electrón atómico.

Teoría clásica de la dispersión electromagnética

Para determinar los valores absolutos de los coeficiente de emisión y absorción de Einstein $A^{i \rightarrow j}$ y $B^{i \rightarrow i}$, se puede recurrir a la teoría clásica de la dispersión de una onda plana electromagnética por un oscilador eléctrico representada por

$$\vec{E} \sim E_x e^{-i\omega t}$$

Si se deprecia el amortiguamiento al ser $\gamma \ll \omega_0$ la ecuación la constante dieléctrica viene dada por

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + N \frac{q^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

y la ecuación de constitución de Maxwell será

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + N \vec{p}$$

donde N es el número de átomos por unidad de volumen y $\vec{p}$ es el dipolo eléctrico de un átomo, que se puede asimilar al dipolo promedio de un oscilador eléctrico

$$p_x = qx = \frac{q^2}{m} \frac{E_x e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

El índice de refracción n será entonces una función de la frecuencia

$$n^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

En el caso de que el electrón pueda estar en diversos estados de excitación de energía en el átomo, cada una de las líneas espectrales asociadas con las frecuencias de transición

$$\hbar\omega_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j$$

contribuye a la dispersión de forma que la relación de dispersión tiene que modificarse de la forma

$$n^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_{ij}}{(\omega_{ij}^2 - \omega^2)}$$

donde las f_{ij} son unas constantes fenomenológicas que nos indican la intensidad en que cada línea espectral contribuye a la dispersión, y que pueden determinarse de forma experimental.

De esta forma la polarización que vendrá dada por

$$p_x = \frac{q^2 E_x}{m} \sum_j \frac{f_{ij} e^{i\omega t}}{(\omega_{ij}^2 - \omega^2)}$$

en el límite $\omega \rightarrow \infty$ será

$$p_x \rightarrow -\frac{q^2 E_x e^{i\omega t}}{m\omega^2} \sum_j f_{ij}$$

Comparando la anterior ecuación para la polarización con ecuación clásica para un electrón casi libre, nos indica que deberá verificarse para todo i el llamado teorema de la suma

$$\sum_i f_{ij} \equiv 1$$

Se puede determinar la probabilidad de emisión espontánea a partir de las relaciones de dispersión del índice de refracción una vez determinados experimentalmente los coeficientes f_{ij} .

A partir de la relación de dispersión se puede calcular la energía que absorbe un átomo (oscilador eléctrico) en la proximidad de una línea espectral ω_{ij} en el intervalo de tiempo dt , y que debe ser igual al coeficiente de absorción de Einstein.

$$\frac{d\bar{\epsilon}_{abs}}{dt} = f_{ij} \frac{\pi q^2}{6\epsilon_0 m} u_{\omega_{ij}} = \hbar \omega_{ij} B_{j \rightarrow i} u_{\omega_{ij}}$$

y por tanto

$$B_{j \rightarrow i} = \frac{\pi q^2}{6\epsilon_0 m \hbar \omega_{ij}} f_{ij}$$

De las relaciones de Einstein se puede calcular el coeficiente de probabilidad de emisión

$$A^{i \rightarrow j} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} B_{j \rightarrow i} = \frac{q^2 \omega_{ij}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m} f_{ij}$$

Fue Dirac quien determino por primera vez los coeficientes f_{ij} de forma teórica mediante la mecánica cuántica calculando las probabilidades de las transiciones entre estados. Una prueba autoconsistente también se puede efectuar mediante la teoría cuántica de radiación del campo electromagnético, como veremos más adelante.

Otra cuestión, es que si una onda electromagnética de luz incide en un átomo, sobre los electrones actuará una fuerza periódica $q\vec{E}$ que los obliga a oscilar como un dipolo. Por ello radiaran energía de acuerdo con la formula anterior, que dependerá de la cuarta potencia de la frecuencia y con una dirección de dispersión dominante, perpendicular a la dirección incidente.

Este es el motivo por el que el cielo se ve azul, ya que la luz proveniente del sol en la alta atmosfera se dispersa lateralmente con preferencia para las frecuencias altas, que corresponde al espectro azulado.

En las puestas de sol, en las que la luz nos llega directamente del horizonte, las componentes azuladas de las frecuencias altas han sido totalmente dispersadas lateralmente, por lo que vemos la luz roja.

La electrodinámica es la interacción que determina la estructura de los átomos, así como la forma en que radian y absorben la luz.

Osciladores electromagnéticos del campo de radiación

Ya vimos el capítulo de las ecuaciones canónicas del campo electromagnético que cualquier función regular admite un desarrollo Fourier.

Para ello se supone que el campo fuera de un volumen $V = L^3$ lo suficientemente grande es nulo, por lo que se puede imponer sin restricción la condición de periodicidad

$$\mathcal{A}^\alpha(x, y, z) = \mathcal{A}^\alpha(x + L, y + L, z + L)$$

Para el gauge Coulomb ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \mathcal{A}^0 = 0 \equiv 0$), vimos que el potencial vector en el vacío sin fuentes, se puede representar mediante un desarrollo de Fourier en ondas planas

$$\begin{aligned} \vec{A}(x^\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \left(\vec{e}_{\vec{k}, \sigma} a_{\vec{k}, \sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{e}_{\vec{k}, \sigma}^* a_{\vec{k}, \sigma}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \left(\vec{e}_{\vec{k}, \sigma} a_{\vec{k}, \sigma} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \vec{e}_{\vec{k}, \sigma}^* a_{\vec{k}, \sigma}^* e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \end{aligned}$$

y el campo electromagnético

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} i\omega \left(\vec{e}_{\vec{k}, \sigma} a_{\vec{k}, \sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} - \vec{e}_{\vec{k}, \sigma}^* a_{\vec{k}, \sigma}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} i\vec{k} \wedge \left(\vec{e}_{\vec{k}, \sigma} a_{\vec{k}, \sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} - \vec{e}_{\vec{k}, \sigma}^* a_{\vec{k}, \sigma}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) \end{aligned}$$

donde las componentes $a_{\vec{k}, \sigma}$ verifican los corchetes de Poisson

$$\{a_{\vec{k}, \sigma}(t), a_{\vec{k}', \sigma'}^*(t)\} = \{a_{\vec{k}, \sigma}^*(t), a_{\vec{k}', \sigma'}(t)\} = -\frac{i}{2\varepsilon_0 |\vec{k}|} \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

y la ecuación armónica

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 a_{\vec{k}, \sigma}}{dt^2} + \vec{k}^2 a_{\vec{k}, \sigma} = 0$$

De las anteriores ecuaciones, se desprende que el campo electromagnético se puede considerar análogo a un sistema de osciladores armónicos con un número infinito de grados de libertad, con oscilación transversal a la dirección de propagación de las ondas planas parciales.

El campo electromagnético está definido por el estado de las amplitudes de los osciladores $a_{\vec{k}, \sigma}$, que se pueden considerar como las coordenadas del campo. Esta es

la idea sobre la que se basó Planck para el tratamiento del problema de la radiación del cuerpo negro.

Le energía del campo electromagnético se escribirá ahora como

$$\mathcal{W}_c = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3 \vec{x} = 2\varepsilon_0 \sum_{\vec{k}, \sigma} \omega_{\vec{k}}^2 a_{\vec{k}, \sigma} a_{\vec{k}, \sigma}^*$$

Si $a_{\vec{k}, \sigma}$ se identifica ahora con la coordenada canónica de posición q_j y $i\varepsilon_0 \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}, \sigma}^*$ con el momento conjugado p_j

$$a_{\vec{k}, \sigma} \leftrightarrow q_j \quad i2\varepsilon_0 \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}, \sigma}^* \leftrightarrow p_j \quad j \leftrightarrow \vec{k}, \sigma$$

se puede entonces escribir el hamiltoniano del campo electromagnético de la forma

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{W}_c = -i \sum_j \omega_j q_j p_j$$

y las ecuaciones canónicas de movimiento serán

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial q_j} \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial p_j}$$

que reproducen las ecuaciones de movimiento para las $a_{\vec{k}, \sigma}$

Otra representación más conveniente que se utiliza es definiendo

$$b_{\vec{k}, \sigma} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega_{\vec{k}}}{\hbar}} a_{\vec{k}, \sigma}$$

con lo que se obtiene para el hamiltoniano

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{W}_c = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}, \sigma}^* b_{\vec{k}, \sigma}$$

donde se ve que $\hbar \omega_{\vec{k}}$ se puede identificar con los fotones que constituyen el campo electromagnético.

Las nuevas variables canónicas en este caso vienen dadas por

$$b_{\vec{k}, \sigma} \leftrightarrow q_j \quad i\hbar b_{\vec{k}, \sigma}^* \leftrightarrow p_j \quad j \leftrightarrow \vec{k}, \sigma$$

El potencial vector se reescribirá como

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\vec{k}}}} \vec{e}_{\vec{k}, \sigma} (b_{\vec{k}, \sigma} + b_{-\vec{k}, \sigma}^*) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

Las ecuaciones de movimiento de primer orden para las $b_{\vec{k}, \sigma}$ tienen una solución armónica que viene dada por

$$b_{\vec{k}, \sigma} = b_{\vec{k}, \sigma}^0 e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \quad b_{\vec{k}, \sigma}^* = b_{\vec{k}, \sigma}^{0*} e^{i\omega_{\vec{k}} t}$$

con lo que el potencial vector vendrá se reescribirá como

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\vec{k}}}} \vec{e}_{\vec{k}, \sigma} (b_{\vec{k}, \sigma}^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + b_{-\vec{k}, \sigma}^{0*} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)})$$

Que representa la suma de dos ondas reales viajando en las dos direcciones opuestas $\vec{k}$ y $-\vec{k}$.

El número de ondas $s(\omega)$ con una frecuencia menor que ω se obtiene a partir de la relación de dispersión

$$\vec{k}^2 = \left(\frac{\omega_{\vec{k}}}{c}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{\omega^2}{c^2} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = R^2$$

$$s(\omega) = \sum_{\vec{k}, \sigma} 1 = \sum_{n_x, n_y, n_z} 2 \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$$

con la restricción

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{\omega^2}{c^2} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = R^2$$

Cuando los n_i son muy grandes y R tiende a un valor muy elevado, el sumatorio para el número de ondas se puede aproximar la suma por una integral que se extiende al volumen de una esfera de radio R con lo que se obtiene

$$s(\omega) = 2 \frac{4\pi}{3} R^3 = 2 \frac{4\pi}{3} \left(\frac{L\omega}{2\pi c}\right)^3$$

El número de ondas $n(\omega)d\omega$ que hay en el intervalo entre ω y $\omega + d\omega$ será entonces

$$n(\omega)d\omega = \frac{ds(\omega)}{d\omega} d\omega = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

Todo lo anterior permite representar la radiación electromagnética y la cavidad del cuerpo negro como un campo de osciladores eléctricos que interaccionan intercambiando energía mediante las partículas de fotones.

Un hecho importante es que el número de fotones no es constante ya que estos se absorben y se crean en los procesos de interacciones con la materia.

Además los fotones pueden ser de dos tipos dependiendo de las dos posibles orientaciones de su espín o polarización.

Las ecuaciones de Maxwell pueden ser representadas de forma canónica con las coordenadas $b_{\vec{k},\sigma}$ y los momentos $i\hbar b_{\vec{k},\sigma}^*$.

Teoría cuántica clásica de la radiación electromagnética

Fue Dirac el primero que desarrolló la teoría de la segunda cuantificación para calcular los coeficientes de probabilidad en la emisión y absorción de fotones de luz del campo electromagnético por los electrones en los átomos. Seguiremos una exposición simplificada de esta teoría dada por Becker que describe la esencia de las ideas de Dirac de cuantificación del campo electromagnético.

En mecánica cuántica se reemplaza a $b_{\vec{k},\sigma}$ y $b_{\vec{k},\sigma}^*$ por los operadores correspondientes de aniquilación y creación $b_{\vec{k},\sigma}$ y $b_{\vec{k},\sigma}^+$ que verifican las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [b_{\vec{k},\sigma}, b_{\vec{k},\sigma}^+] &= b_{\vec{k},\sigma} b_{\vec{k},\sigma}^+ - b_{\vec{k},\sigma}^+ b_{\vec{k},\sigma} = \delta_{\sigma\sigma} \delta_{\vec{k}\vec{k}} \\ [b_{\vec{k},\sigma}, b_{\vec{k},\sigma}] &= b_{\vec{k},\sigma} b_{\vec{k},\sigma} - b_{\vec{k},\sigma} b_{\vec{k},\sigma} = 0 \\ [b_{\vec{k},\sigma}^+, b_{\vec{k},\sigma}^+] &= b_{\vec{k},\sigma}^+ b_{\vec{k},\sigma}^+ - b_{\vec{k},\sigma}^+ b_{\vec{k},\sigma}^+ = 0 \end{aligned}$$

El potencial vector y el hamiltoniano vienen ahora representados por los operadores

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\vec{k}}}} \vec{e}_{\vec{k}, \sigma} (b_{\vec{k}, \sigma} + b_{-\vec{k}, \sigma}^+) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ H_c &= \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma} \end{aligned}$$

Los estados del campo electromagnético vienen ahora representados funciones de estado. Si Φ es una función que representa un estado propio de hamiltoniano del campo electromagnético verificara entonces la ecuación

$$H_c \Phi = \mathcal{E} \Phi \rightarrow \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma} \Phi = \mathcal{E} \Phi$$

donde $\mathcal{E}$ representa la energía asociada al estado propio Φ

Sobre las soluciones del hamiltoniano se puede construir un espacio vectorial complejo de Hilbert de funciones de estado dotadas de producto interno que sea una forma bilineal compleja que permite definir una norma positiva para las funciones de estado. En esencia casi todos principios de la mecánica cuántica están contenidos en este párrafo.

El producto interno de dos funciones de estado se representa como el número complejo

$$\langle \Psi | \Phi \rangle \equiv \langle \Phi | \Psi \rangle^*$$

Se supone que todas las funciones de estado en el espacio de Hilbert al que pertenecen están normalizadas a la unidad

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = 1$$

Además, si Φ y Φ' son de autoestados propios con diferente energía siempre son ortogonales

$$\langle \Phi | \Phi' \rangle = 0$$

Haciendo el producto escalar con Φ en la ecuación de energía para el hamiltoniano se obtiene la desigualdad

$$\mathcal{E}\Phi = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar\omega_{\vec{k}} \langle \Phi | b_{\vec{k}, \sigma}^{\dagger} b_{\vec{k}, \sigma} \Phi \rangle = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar\omega_{\vec{k}} \langle b_{\vec{k}, \sigma} \Phi | b_{\vec{k}, \sigma} \Phi \rangle \mathcal{E}\Phi > 0$$

555

que indica que los autovalores de energía siempre son positivos.

Se ha tenido en cuenta que $b_{\vec{k}, \sigma}^{\dagger}$ es el operador adjunto de $b_{\vec{k}, \sigma}$.

Teniendo en cuenta las relaciones de conmutación la ecuación del hamiltoniano se reduce a la expresión

$$\sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar\omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}, \sigma}^{\dagger} b_{\vec{k}, \sigma} (b_{\vec{k}, \sigma} \Phi) = (\mathcal{E} - \hbar\omega_{\vec{k}}) (b_{\vec{k}, \sigma} \Phi)$$

lo que nos indica que $b_{\vec{k}, \sigma} \Phi$ es una función propia del hamiltoniano con el autovalor de energía $\mathcal{E} - \hbar\omega_{\vec{k}}$. Por tanto, el operador $b_{\vec{k}, \sigma}$ disminuye la energía del sistema en un cuanto de energía $\hbar\omega_{\vec{k}}$ por lo que se le denomina también operador aniquilación.

Si esta operación se repite n veces se obtiene que $b_{\vec{k}, \sigma}^n \Phi$ es un autoestado con el valor propio $\mathcal{E} - n\hbar\omega_{\vec{k}}$.

Como la energía es positiva existirá un $b_{\vec{k}, \sigma}^{n_{\vec{k}, \sigma}}$ tal será $b_{\vec{k}, \sigma}^{n_{\vec{k}, \sigma}+1} \Phi = 0$, por lo que tendremos

$$\sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma} \left(b_{\vec{k}, \sigma}^{n_{\vec{k}}, \sigma} \Phi \right) = (\mathcal{E} - n_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}}) \left(b_{\vec{k}, \sigma}^{n_{\vec{k}}, \sigma} \Phi \right)$$

Si definimos la siguiente función de estado

$$\Psi = b_{\vec{k}, \sigma}^{n_{\vec{k}}, \sigma} \left(b_{\vec{k}, \sigma}^{n_{\vec{k}}, \sigma} \Phi \right)$$

se comprueba que es también un autoestado con energía $E - n_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} - n_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}}$, ya que verifica

$$H_c \Psi = (\mathcal{E} - n_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} - n_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}}) \Psi$$

Mediante este método es posible generar todas las autofunciones posibles que forman el espacio vectorial de Hilbert para el hamiltoniano del campo electromagnético.

Si aplicamos el anterior procedimiento para cada una de los $b_{\vec{k}, \sigma}$ de forma sucesiva podemos obtener un estado fundamental Φ_0 que verifique la ecuación de valores propios de energía

$$\Phi_0 = \prod_{\vec{k}, \sigma} b_{\vec{k}, \sigma}^{n_{\vec{k}}, \sigma} \Phi \quad H_c \Phi_0 = \left(\mathcal{E} - \sum_{\vec{k}, \sigma} n_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} \right) \Phi_0$$

y que además sea para todo $\vec{k}$

$$b_{\vec{k}, \sigma} \Phi_0 \equiv 0$$

Esto nos indica que la energía del campo electromagnético es

$$\mathcal{E} = \sum_{\vec{k}, \sigma} n_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}}$$

Por tanto, un estado del campo electromagnético Φ es función de las $n_{\vec{k}}$ y es mas conveniente escribirlo con la notación explícita

$$\Phi \equiv \Phi_{n_{\vec{k}_1 \sigma_1}, n_{\vec{k}_2 \sigma_2}, \dots, n_{\vec{k}_j \sigma_j} \dots}$$

donde por $n_{\vec{k}_1 \sigma_1}, n_{\vec{k}_2 \sigma_2}, \dots, n_{\vec{k}_j \sigma_j} \dots$ se representa un ordenamiento de los $n_{\vec{k}}$ escogido de alguna forma particular.

El estado fundamental que corresponde al vacío Φ_0 sin campo electromagnético se puede escribir también de la forma

$$\Phi_0 \equiv \Phi_{0,0,\dots,0,\dots}$$

De igual forma se comprueba que si Φ es una función propia del hamiltoniano correspondiente a la energía $\mathcal{E}$ entonces $b_{\vec{k},\sigma}^+ \Phi$ es también un autoestado correspondiente a la energía $\mathcal{E} + \hbar\omega_{\vec{k}}$. Por esta razón a $b_{\vec{k},\sigma}^+$ se le denomina también operadores de creación.

Se puede construir también todo el espacio vectorial de Hilbert aplicando de forma repetitiva $b_{\vec{k},\sigma}^+$ al estado del vacío Φ_0 con lo que se obtiene que cualquier estado propio del hamiltoniano se puede escribir de la forma

$$\Phi_{\dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots} = \prod_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}\sigma}}} b_{\vec{k}\sigma}^{n_{\vec{k}\sigma}} \Phi_0$$

Puesto que los $n_{\vec{k}\sigma}$ forman un conjunto de enteros positivos, se define el número de cuantos de luz o fotones, como el número de ondas $\vec{k}$ con polarización σ que existe en el espectro del campo electromagnético determinado por desarrollo Fourier del potencial vector representado por la función de estado $\Phi_{\dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots}$ con la energía

$$\mathcal{E} = \sum_{\vec{k}, \sigma} n_{\vec{k}\sigma} \hbar \omega_{\vec{k}}$$

Los operadores de creación y aniquilación de fotones actúan sobre la función de estado como

$$\begin{aligned} b_{\vec{k},\sigma}^+ \Phi_{\dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots} &= \sqrt{n_{\vec{k}\sigma} + 1} \Phi_{\dots, n_{\vec{k}\sigma} + 1, \dots} \\ b_{\vec{k},\sigma} \Phi_{\dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots} &= \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \Phi_{\dots, n_{\vec{k}\sigma} - 1, \dots} \end{aligned}$$

donde las funciones de estado están normalizadas a la unidad de forma que

$$\langle \Phi_{\dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots} | \Phi_{\dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots} \rangle = 1$$

Los fotones por tanto son creados y aniquilados por los operadores $b_{\vec{k},\sigma}^+$ y $b_{\vec{k},\sigma}$.

El conjunto de todos los estados propios $\Phi_{\dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots}$ forma un espacio vectorial de Hilbert y dan una descripción equivalente a la mecánica cuántica ondulatoria de Schrödinger o a la mecánica cuántica matricial de Heisenberg.

Observemos que el número de fotones $n_{\vec{k}\sigma}$ viene representado también por el operador

$$n_{\vec{k}\sigma} = b_{\vec{k},\sigma}^+ b_{\vec{k},\sigma}$$

de forma que el número total de fotones será el operador

$$N = \sum_{\vec{k}, \sigma} n_{\vec{k}, \sigma} = \sum_{\vec{k}, \sigma} b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma}$$

Esta descripción de la de la mecánica cuántica en función de los operadores de creación y aniquilación fue dada primero por Dirac y se conoce como teoría de la segunda cuantificación.

Su aplicación al campo electromagnético de la radiación por átomos permite calcular de forma absoluta los coeficientes de probabilidad de absorción y emisión de radiación de Einstein.

Consideramos un átomo con un solo electrón de valencia. El hamiltoniano para una carga que interacciona con un campo eléctrico, como vimos en el capítulo de teorías canónicas y gauge viene dado por

$$\mathcal{H} = (\vec{p} - q\vec{A})^2 + \mathcal{H}_c = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_{int}$$

El hamiltoniano $\mathcal{H}_{int}$ que describe la interacción entre el electrón y el campo electromagnético se puede representar como

$$H_{int} = -q\vec{A} \cdot \vec{p} = -\frac{q}{m} \vec{A} \cdot \vec{p}$$

ya que el termino $\vec{A}^2$ no contribuye.

El hamiltoniano del campo eléctrico libre $\mathcal{H}_c$ es

$$\mathcal{H}_c = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma}$$

Por H_e designaremos el hamiltoniano del electrón en el átomo sin perturbar.

Por tanto, el hamiltoniano total que representa a un electrón en un átomo que interacciona con un campo electromagnético será entonces

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_c + \mathcal{H}H_{int}$$

La interacción en función de los operadores de aniquilación y creación se puede reescribir como

$$\mathcal{H}_{int} = -\frac{q}{m} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{V 2 \epsilon_0 \omega_{\vec{k}}}} \vec{e}_{\vec{k}, \sigma} \cdot \vec{p} \left(b_{\vec{k}, \sigma} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + b_{\vec{k}, \sigma}^+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

Por ϕ_i se representa las funciones propias de estado del hamiltoniano del electrón con energía $\mathcal{E}_i$ en el átomo sin perturbar que verifican la ecuación de energía

$$H_e \phi_i = \mathcal{E}_i \phi_i$$

Desinemos por H_0 el hamiltoniano del electrón en átomo y del campo electromagnético sin interacción entre ambos

$$H_0 = H_e + H_c$$

Las funciones propias ψ_{0i} del hamiltoniano $H_0 = H_e + H_c$ al no considerarse la interacción vienen dadas por el producto de los autoestados de cada uno de los hamiltonianos del electrón y del campo

$$\psi_{0\mu} = \phi_i \Phi_{\dots n_{\vec{k}\sigma} \dots}$$

de forma que verifica la ecuación de valores propios

$$H_0 \psi_{0\mu} = (H_e + H_c) \psi_{0\mu} = \mathcal{E}_{0\mu} \psi_{0\mu}$$

siendo

$$\mathcal{E}_{0\mu} = \mathcal{E}_i + \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} n_{\vec{k}, \sigma}$$

donde por μ se representa el conjunto de números cuánticos $i, \vec{k}, \sigma$.

En mecánica cuántica la evolución temporal de la funciones de estado de un sistema físico que viene representado por un hamiltoniano H deben obedecer a la ecuación de Schrodinger

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Entonces como consecuencia cualquier estado posible ψ puede ser representado por un desarrollo de la forma

$$\psi = \sum_v C_v(t) e^{\frac{i\mathcal{E}_{0v}t}{\hbar}} \phi_{0v}$$

Los coeficientes $C_v(t)$ se determinan introduciendo la función de estado en la ecuación de Schrodinger y efectuando el producto escalar interno por las funciones $\psi_{0\mu}$.

Si H es el hamiltoniano total del electrón atómico y el campo $H = H_e + H_c + H_{int}$ incluyendo la interacción, se obtiene entonces en siguiente conjunto de ecuaciones para los coeficientes $C_v(t)$

$$\frac{dC_\mu}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_\nu \langle \psi_{0\mu} | H_{int} \psi_{0\nu} \rangle e^{i\omega_{\mu\nu}t} C_\nu$$

siendo

$$\hbar\omega_{\mu\nu} = \mathcal{E}_{0\mu} - \mathcal{E}_{0\nu}$$

Por tanto, si el sistema formado por electrón del átomo y el campo electromagnético con el que interacciona está inicialmente en $t = 0$ en el estado $\psi = \psi_{0\nu}$ con $C_\mu(0) = \delta_{\mu\nu}$, hay entonces una probabilidad igual a $|C_\mu(t)|^2$ de que se encuentre en el estado $\psi_{0\mu}$ en el tiempo posterior t .

Las ecuaciones para las $C_\mu(t)$ fueron resueltas por Dirac mediante perturbaciones tratando la interacción como una perturbación encontrado la solución en primer orden

$$|C_\mu(t)|^2 = P^{\nu \rightarrow \mu} t = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle \psi_{0\mu} | H_{int} \psi_{0\nu} \rangle|^2 \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\omega_{\mu\nu}t}{2}\right)}{\left(\frac{\pi\omega_{\mu\nu}^2}{2}\right)} t$$

Por tanto la probabilidad de transición desde el estado ν al estado μ por unidad de tiempo viene dada por

$$P^{\nu \rightarrow \mu} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle \psi_{0\mu} | H_{int} \psi_{0\nu} \rangle|^2 \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\omega_{\mu\nu}t}{2}\right)}{\left(\frac{\pi\omega_{\mu\nu}^2}{2}\right)}$$

Puesto que los operadores de creación y aniquilación $b_{\vec{k},\sigma}^+$ y $b_{\vec{k},\sigma}$ solo aparecen una vez de una forma lineal en la interacción, el elemento de la matriz $\langle \psi_{0\hbar\mu}, H_{int} \psi_{0\nu} \rangle$ solo difiere de cero si una de las $n_{\vec{k},\sigma}$ del estado final $\psi_{0\hbar\mu}$ difiere en una unidad de su correspondiente estado inicial $\psi_{0\nu}$.

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \langle \psi_{0\mu}, b_{\vec{k},\sigma}^+ \psi_{0\nu} \rangle &= \langle \Phi_{\dots, n_{\vec{k},\sigma} + 1, \dots} | b_{\vec{k},\sigma}^+ \Phi_{\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots} \rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\sigma} + 1} \\ \langle \psi_{0\mu}, b_{\vec{k},\sigma} \psi_{0\nu} \rangle &= \langle \Phi_{\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots} | b_{\vec{k},\sigma} \Phi_{\dots, n_{\vec{k},\sigma} - 1, \dots} \rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\sigma}} \end{aligned}$$

donde todos los demás números cuánticos distintos de $\vec{k}\sigma$ son los mismos en $\psi_{0\mu}$ y $\psi_{0\nu}$.

Esto indica también que la probabilidad de que se emita un fotón aumenta con un factor $n_{\vec{k},\sigma} + 1$ si ya hay $n_{\vec{k},\sigma}$ presentes. Veremos que el origen de este

comportamiento tiene sus raíces en causas más profundas sobre la indistinguibilidad de los fotones como partículas.

Todo lo anterior significa que en primer orden perturbaciones solo ocurren transiciones en las cuales solo un cuanto de luz (fotón) es emitido (creado) o absorbido (aniquilado) del campo electromagnético.

El número de fotones como partículas no se conserva y son creados y aniquilados en los procesos de interacción del campo electromagnético con los electrones.

Cuando t es muy grande la siguiente función se puede aproximar por una delta de Dirac

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\left(\frac{\pi \omega^2 t}{2}\right)} \rightarrow \delta(\omega) \quad t \rightarrow \infty$$

Lo cual implica que cuando ha transcurrido un tiempo suficientemente grande con relación a las frecuencias implicadas ($\omega_{\mu\nu} t \gg 1$) solo ocurren las transiciones para las cuales para las frecuencias próximas al estado inicial.

$$\omega_{\mu\nu} \approx 0 \Rightarrow \omega_{\mu} \approx \omega_{\nu}$$

Si $\omega_{\vec{k}}$ representa la frecuencia emitida o absorbida de un cuanto de luz del campo electromagnético, se verificará entonces

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_j + \hbar\omega_{\vec{k}} \quad \text{absorción}$$

$$\mathcal{E}_j + \hbar\omega_{\vec{k}} = \mathcal{E}_i \quad \text{emisión}$$

donde el primer miembro de las igualdades corresponde al estado inicial y el segundo miembro al estado final del sistema, conservándose siempre la energía total.

En adelante supondremos que $\mathcal{E}_i > \mathcal{E}_j$.

Para la emisión la probabilidad por unidad de tiempo de las transiciones es

$$P_{\vec{k},\sigma}^{i \rightarrow j} = \frac{\pi q^2}{V \epsilon_0 m^2 \hbar} \frac{(n_{\vec{k},\sigma} + 1)}{\omega_{\vec{k}}} \left| \langle \phi_j | \vec{e}_{\vec{k},\sigma} \cdot \vec{p} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | \phi_i \rangle \right|^2 \delta(\omega_{ij} - \omega_{\vec{k}})$$

Si un átomo se encuentra en el estado ϕ_i en $t=0$ en presencia de un campo electromagnético $\Phi_{\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots}$ entonces $P_{\vec{k},\sigma}^{i \rightarrow j} dt$ es la probabilidad de que en un tiempo después entre t y $t+dt$ el átomo se encuentre en otro estado ϕ_j habiéndose emitido un cuanto de luz (fotón) con una frecuencia $\omega_{\vec{k}}$ y una polarización σ .

Debido al factor $n_{\vec{k},\sigma} + 1$, esta probabilidad tiene dos componentes.

La componente que tiene el factor $n_{\vec{k}\sigma}$ es proporcional a la intensidad del campo de radiación electromagnética presente, y está por tanto, relacionada con la probabilidad de emisión inducida $B^{i \rightarrow j}$ definida por Einstein.

La otra componente de la probabilidad que contiene el factor 1 es independiente del campo electromagnético, existiendo incluso cuando no está presente el campo de radiación, por lo que tiene que estar directamente relacionado con el coeficiente de probabilidad de emisión espontánea $A^{i \rightarrow j}$ de Einstein.

La presencia del factor $n_{\vec{k}\sigma}$ en la emisión inducida veremos más adelante tiene su origen en otros fenómenos físicos más profundos relacionados con la indistinguibilidad de las partículas llamadas bosones, y procede de las relaciones de conmutación de los operadores $b_{\vec{k},\sigma}$.

Cuando el volumen de la cavidad del cuerpo negro $V = L^3$ es muy grande con $L \rightarrow \infty$ los sumatorios en $\vec{k}$ de una función $f_{\vec{k}}$ se pueden aproximar por una integral continua de la forma

$$\sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int f_{\vec{k}} k^2 dk d\Omega$$

Siendo $k = |\vec{k}| = \omega_{\vec{k}}/c$, y $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ es el elemento de ángulo sólido donde θ es el ángulo que forma $\vec{k}$ con el eje z escogido.

Debido a la presencia de $\delta(\omega_{ij} - \omega_{\vec{k}})$ en $P_{\vec{k},\sigma}^{i \rightarrow j}$ si integramos la probabilidad de transición para todos los $\vec{k}$ posibles, solo contribuirán aquellas transiciones para las que $c|\vec{k}| = \omega_{ij}$.

Si se considera además las frecuencias ópticas tienen longitudes de onda $\lambda = \frac{2\pi}{c|\vec{k}|}$ que son muy grandes comparadas con el tamaño del átomo, entonces el término $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ en el cálculo de la probabilidad de transición se puede aproximar por la unidad $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \approx 1$, lo que se conoce como la aproximación dipolar

$$\langle \phi_i | \vec{e}_{\vec{k},\sigma} \cdot \vec{p} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | \phi_j \rangle \approx \langle \phi_i | \vec{e}_{\vec{k},\sigma} \cdot \vec{p} | \phi_j \rangle = \vec{e}_{\vec{k},\sigma} \cdot \langle \phi_i | \vec{p} | \phi_j \rangle = \vec{e}_{\vec{k},\sigma} \cdot \vec{p}_{\mu,\nu}$$

Si se toma $\vec{e}_{\vec{k},1}$ en el plano que forman $\vec{p}_{\mu,\nu}$ y $\vec{k}$ y $\vec{e}_{\vec{k},2}$ normal a él, será entonces

$$\vec{e}_{\vec{k},2} \cdot \vec{p}_{\mu,\nu} = 0 \text{ y } \vec{e}_{\vec{k},1} \cdot \vec{p}_{\mu,\nu} = |\vec{p}_{\mu,\nu}| \sin\theta$$

La probabilidad de emisión espontánea teniendo en cuenta todas las posibles transiciones vendrá dada por

$$P_{e.e}^{i \rightarrow j} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{q^2}{\epsilon_0 m^2 c^3 \hbar} \omega_{ij} \int |\vec{e}_{\vec{k},1} \cdot \vec{p}_{ij}|^2 d\Omega = \frac{1}{3\pi} \frac{q^2}{\epsilon_0 m^2 c^3 \hbar} \omega_{\mu\nu} |\vec{p}_{ij}|^2$$

En mecánica cuántica $\vec{x}$ y $\vec{p}$ verifican la relación de conmutación

$$[\vec{x}, \vec{p}] = i\hbar \vec{I}$$

por lo que se verifica la igualdad

$$\vec{p}_{ij} = im\omega_{ij} \langle \phi_i | \vec{x} | \phi_j \rangle = im\omega_{ij} \vec{x}_{ij}$$

Por tanto, la probabilidad de emisión espontánea por unidad de tiempo para todas las direcciones posibles del fotón emitido será

$$P_{e.e}^{i \rightarrow j} = \frac{1}{3\pi} \frac{q^2}{\epsilon_0 c^3 \hbar} \omega_{ij}^3 |\vec{x}_{ij}|^2$$

La misma expresión se obtendría de forma más directa a partir de del gauge dipolar

El término que era proporcional $n_{\vec{k}\sigma}$ nos daba la probabilidad de emisión inducida y como la densidad de energía es

$$u_{\omega} = \hbar\omega n(\omega)$$

obtenemos haciendo una integración de forma similar para todas las direcciones de emisión que

$$P_{e.i}^{i \rightarrow j} = \frac{\pi}{3} \frac{q^2}{\epsilon_0 \hbar^2} u_{\omega_{ij}} |\vec{x}_{ij}|^2$$

Se obtendría resultados similares para el caso de la absorción inducida de fotones por los átomos reemplazando $n_{\vec{k}\sigma} + 1$ por $n_{\vec{k}\sigma}$ en las ecuaciones para la emisión inducida, por lo que será entonces

$$P_{a.i}^{i \rightarrow j} = P_{e.i}^{i \rightarrow j}$$

Comparando con los coeficientes Einstein debe ser

$$A^{i \rightarrow j} \equiv P_{e.e}^{i \rightarrow j} = \frac{1}{3\pi} \frac{q^2}{\epsilon_0 c^3 \hbar} \omega_{ij}^3 |\vec{x}_{ij}|^2$$

$$B^{i \rightarrow j} u_{\omega_{ij}} \equiv P_{e.i}^{i \rightarrow j} = \frac{\pi}{3} \frac{q^2}{\epsilon_0 \hbar^2} u_{\omega_{ij}} |\vec{x}_{ij}|^2 \equiv B^{j \rightarrow i} u_{\omega_{ij}}$$

con lo que se satisface de forma inmediata la relación obtenida por Einstein

$$A^{i \rightarrow j} \equiv \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} B^{j \rightarrow i}$$

Aunque Einstein calculó esta relación fenomenológicamente por argumentos termodinámicos, sin embargo la teoría de la segunda cuantificación de Dirac permite calcular los valores absolutos de todos los coeficientes de probabilidad de emisión y absorción.

La vida media τ del estado excitado en el átomo en niveles altos de energía está relacionada, como vimos, con el coeficiente de amortiguamiento γ del electrón en el modelo del oscilador y con la anchura 2γ espectral de las líneas de emisión, y viene dado por

$$\frac{1}{\tau} = \gamma = P_{e,e}^{i \rightarrow j} = \frac{1}{3\pi} \frac{q^2}{\epsilon_0 c^3 \hbar} \omega_{ij}^3 |\vec{x}_{ij}|^2$$

Con la teoría de la segunda cuantificación de Dirac es posible calcular también de forma rigurosa el momento línea y angular del campo electromagnético.

Como ya vimos el momento lineal viene dado por

$$\vec{G} = \epsilon_0 \int \vec{E} \wedge \vec{B} d^3\vec{x} = -\epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} d^3\vec{x} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar k b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma}$$

El momento lineal $\vec{G}$ es constante en el tiempo ya que su operador conmuta con el hamiltoniano del campo electromagnético H_{em} en el vacío.

La densidad de momento lineal $\vec{g}$ se puede descomponer en dos componentes

$$\begin{aligned} g^i &= (\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})^i = \left(-\epsilon_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right)^i = \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial A^j}{\partial t} \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \right) + \epsilon_0 \frac{\partial A^k}{\partial t} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^i} \right) = \\ &= -\epsilon_0 \left(\frac{\partial A^j}{\partial t} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} + \frac{\partial A^k}{\partial t} \frac{\partial A^k}{\partial x^i} \right) + \epsilon_0 \left(\frac{\partial A^j}{\partial t} \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \frac{\partial A^k}{\partial t} \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \right) = \\ &= -\epsilon_0 \sum_j \frac{\partial A^j}{\partial t} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} + \epsilon_0 \sum_j \frac{\partial A^j}{\partial t} \frac{\partial A^i}{\partial x^j} = g_1^i + g_2^i \end{aligned}$$

El segundo término g_2^i no contribuye a la integral para $\vec{G}$ ya que se anula

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_0} \int g_2^i d^3\vec{x} &= \int \sum_j \frac{\partial A^j}{\partial t} \frac{\partial A^i}{\partial x^j} d^3\vec{x} = \int \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} A^i \right) d^3\vec{x} - \int \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} A^i d^3\vec{x} \\ &= \int \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} A^i \right) \cdot d\vec{S} - \int \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} A^i d^3\vec{x} \equiv 0 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\text{div} \vec{A} = 0$ y la primera integral también se anula por las condiciones de periodicidad impuestas en la frontera.

Por tanto solo contribuye el primer término al momento lineal total

$$\vec{G} = \int \vec{g}_1 d^3\vec{x}$$

De igual forma para el momento angular del campo electromagnético se tiene

$$\vec{L} = \int \vec{x} \wedge \vec{g} d^3\vec{x} = \int \vec{x} \wedge \vec{g}_1 d^3\vec{x} + \int \vec{x} \wedge \vec{g}_2 d^3\vec{x}$$

El primer término que corresponde al momento orbital total del campo de radiación depende del origen de coordenadas y se puede anular escogiéndolo de forma conveniente.

La segunda integral se puede transformar teniendo en cuenta las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} (\vec{x} \wedge \vec{g}_2)^i &= \varepsilon_0 \sum_l x^j \frac{\partial A^l}{\partial t} \frac{\partial A^k}{\partial x^l} \varepsilon_0 \sum_l x^k \frac{\partial A^l}{\partial t} \frac{\partial A^j}{\partial x^l} \\ &= \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} A^k x^j \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial A^j}{\partial t} A^k - x^j A^k \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} - \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(x^k \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} A^j \right) A^j + \varepsilon_0 \frac{\partial A^k}{\partial t} A^j \\ &\quad + \varepsilon_0 x^k A^j \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} A^j \end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$\int \vec{x} \wedge \vec{g}_2 d^3\vec{x} = \varepsilon_0 \int \vec{A} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d^3\vec{x}$$

Por tanto, el momento angular del campo viene dado por el segundo término que no depende del origen de coordenadas, y corresponde al momento angular intrínseco o espín del campo electromagnéticos

$$\vec{L}_{\text{espin}} = \varepsilon_0 \int \vec{A} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d^3\vec{x} = \varepsilon_0 \int \vec{E} \wedge \vec{A} d^3\vec{x}$$

En la formulación de la segunda cuantificación se puede escribir como

$$\vec{L}_{\text{espin}} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{e}_k (b_{\vec{k},+}^+ b_{\vec{k},+} - b_{\vec{k},-}^+ b_{\vec{k},-}) = \sum_{\vec{k}} \vec{L}_k$$

habiéndose definido las operadores polarizaciones circulares

$$b_{\vec{k},+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{\vec{k},1} + ib_{\vec{k},2})$$

$$b_{\vec{k},-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{\vec{k},1} - ib_{\vec{k},2})$$

y el vector unitario en la dirección de propagación

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{k}}{k}$$

El hamiltoniano en función de estos operadores toma la expresión

$$H_c = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k (b_{\vec{k},+}^+ b_{\vec{k},+} + b_{\vec{k},-}^+ b_{\vec{k},-}) = \sum_{\vec{k}} (H_{\vec{k},+} + H_{\vec{k},-})$$

y el momento lineal total

$$\vec{G} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} (b_{\vec{k},+}^+ b_{\vec{k},+} + b_{\vec{k},-}^+ b_{\vec{k},-}) = \sum_{\vec{k}} (\vec{G}_{\vec{k},+} + \vec{G}_{\vec{k},-})$$

El momento angular es una constante de tiempo ya que conmuta con el hamiltoniano del campo electromagnético.

Como los valores propios de $\vec{L}_{\vec{k},+}$ y $\vec{L}_{\vec{k},-}$ son $+\hbar \vec{e}_k$ y $-\hbar \vec{e}_k$, esto nos dice que existen dos tipos de fotones polarizados circularmente que tienen un momento angular cuantizado en $+\hbar$ y $-\hbar$.

Además cada fotón lleva una energía igual $\hbar \omega_k$ y un momento lineal $\hbar \vec{k}$, lo que está de acuerdo con la teoría de la relatividad de Einstein, considerando que los fotones son partículas sin masa que se propagan a la velocidad de la luz c , ya que se cumple la ecuación de energía momento

$$c^2 \vec{G}_{\vec{k}\sigma}^2 = H_{\vec{k}\sigma}^2$$

Un aspecto importante es que la probabilidad de que un átomo absorba un fotón es proporcional a la intensidad de la luz incidente, o lo que es lo mismo, a la densidad de energía del campo electromagnético que lo rodea. Lo mismo sucede la emisión estimulada que es proporcional a la densidad de energía existente.

Este fenómeno proviene de que los fotones como bosones son partículas con espín 1 que son indistinguibles entre si y, por tanto, la función de estado del total del

conjunto de fotones es invariante ante una permutación entre ellos por lo que debe ser una suma de la combinación de toda las permutaciones de las funciones de estado individuales de cada fotón.

Esta invarianza hace que sea 2 veces más probable encontrar dos fotones (bosones) idénticos en un mismo estado que lo que sería si fuesen partículas distintas.

Si aplicamos esta regla iterativamente a n fotones, se obtiene que la probabilidad de encontrar $n + 1$ fotones en el mismo estado sea

$$P_{n+1} = (n + 1)P_n P_0$$

donde P_0 es la probabilidad de que ocurra un proceso con un solo fotón cuando no están presente ningún otro. Este mismo tipo de ecuación es la que hemos encontrado en los procesos de emisión.

Esto es la causa de que los coeficientes de probabilidad de Einstein de emisión y absorción inducida sean iguales y proporcionales a la densidad de radiación (número de fotones presentes en el campo) y estén relacionados con la probabilidad de emisión espontánea.

En mecánica cuántica el módulo al cuadrado de la función de onda de un solo fotón nos daría la probabilidad de encontrar el fotón en un punto del espacio. La ecuación de ondas para el fotón debería ser similar a las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, por lo que se tendría la tendencia a relacionar la función de onda con los potenciales del campo electromagnético.

Los fotones como bosones, son partículas que no interaccionan entre ellos y tienden a estar en un mismo estado.

Solo si hay muchos fotones en el mismo estado con la misma función de onda es cuando la función de onda macroscópicamente concuerda con los potenciales electromagnéticos.

Sin embargo la determinación de la ecuación de ondas de un solo fotón es mucho más compleja que lo expuesto anteriormente y requiere para su análisis de la electrodinámica cuántica.

El que el campo de interacción sea mediante un potencial cuadvivector real, que cuantizado da origen al fotón, es una consecuencia de que la simetría gauge procede solo de un parámetro continuo (fase) que tiene la propiedad de grupo continuo. El fotón se denomina también partícula gauge o campo de mediación. Además, origina además de la conservación de la carga eléctrica, y que esta sea un escalar aditivo.

Las ecuaciones de Maxwell son equivalentes a un sistema de partículas de masa 0 y espín 1.

Principios de incertidumbre en el campo electromagnético

Hemos visto que el potencial se puede representar por el operador

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\vec{k}}}} \left(\vec{e}_{\vec{k}, \sigma} b_{\vec{k}, \sigma}^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} + \vec{e}_{\vec{k}, \sigma}^* b_{\vec{k}, \sigma}^{0*} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} \right)$$

con las relaciones de conmutación

$$[b_{\vec{k}, \sigma}, b_{\vec{k}', \sigma}^+] = b_{\vec{k}, \sigma} b_{\vec{k}', \sigma}^+ - b_{\vec{k}', \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

$$[b_{\vec{k}, \sigma}, b_{\vec{k}', \sigma'}] = b_{\vec{k}, \sigma} b_{\vec{k}', \sigma'} - b_{\vec{k}', \sigma'} b_{\vec{k}, \sigma} = 0$$

$$[b_{\vec{k}, \sigma}^+, b_{\vec{k}', \sigma'}^+] = b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}', \sigma'}^+ - b_{\vec{k}', \sigma'}^+ b_{\vec{k}, \sigma}^+ = 0$$

Cada componente en ondas planas del potencial tendrá asociada una fase que vendrá representada por el operador

$$e^{i\vartheta_{\vec{k}, \sigma}} = b_{\vec{k}, \sigma} \left(\sqrt{b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma}} \right)^{-1} \text{ o}$$

$$e^{-i\vartheta_{\vec{k}, \sigma}} = b_{\vec{k}, \sigma}^+ \left(\sqrt{b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma}} \right)^{-1}$$

Recordemos que $b_{\vec{k}, \sigma}^+ b_{\vec{k}, \sigma}$ es el número de fotones $n_{\vec{k}, \sigma}$ presentes el campo de radiación. De las relaciones de conmutación de las $b_{\vec{k}, \sigma}, b_{\vec{k}, \sigma}^+$ se deduce otra relación de conmutación

$$e^{i\vartheta_{\vec{k}, \sigma}} n_{\vec{k}, \sigma} - n_{\vec{k}, \sigma} e^{-i\vartheta_{\vec{k}, \sigma}} \equiv e^{i\vartheta_{\vec{k}, \sigma}}$$

o también

$$\vartheta_{\vec{k}, \sigma} n_{\vec{k}, \sigma} - n_{\vec{k}, \sigma} \vartheta_{\vec{k}, \sigma} = -i$$

En mecánica cuántica cuando dos operadores verifican una relación de conmutación del tipo

$$AB - BA = c$$

donde c es una constante, se demuestra que la incertidumbre ΔA en la medida de A multiplicada por la incertidumbre ΔB en la medida de B siempre será mayor que el módulo de c

$$\Delta A \Delta B \geq |c|$$

Por tanto será

$$\Delta\theta_{\vec{k},\sigma}\Delta n_{\vec{k},\sigma} \geq 1$$

Esta relación es importante pues nos dice que si el número de fotones de una onda parcial es conocido, entonces está totalmente indeterminada la fase de la onda parcial correspondientes. Al contrario si se conoce totalmente la fase de una onda parcial esta indeterminado el número de fotones presentes en dicha onda.

La indeterminación de las fases y del número de fotones presentes debe cumplir siempre la anterior desigualdad. La incertidumbre en el desfase crea una dispersión en un tren de ondas cuya incertidumbre en la posición y del momento o dirección asociado cumple con la relaciones de indeterminación de Heisenberg.

Todo esto también está asociado con que el momento de una onda parcial nunca puede ser más pequeño que $\hbar\omega_{\vec{k}}/c$.

Estas indeterminaciones producen en otras similares para los observables del campo eléctrico y magnético, lo cual es de esperar, ya que el potencial vector se desarrolla en función de los operadores $b_{\vec{k},\sigma}$ y $b_{\vec{k},\sigma}^+$ que no conmutan entre ellos.

Existe un principio de correspondencia entre los corchetes de Poisson de dos magnitudes observables de la mecánica clásica y sus conmutadores equivalentes de la mecánica cuántica que establece la relación

$$[F, G] \leftrightarrow i\hbar\{F, G\}$$

por lo que las medidas simultáneas de dos magnitudes cuánticas F y G tendrán siempre una incertidumbre

$$\Delta A \Delta B \geq i\hbar\{F, G\}_{\text{clásico}}$$

En el capítulo de de teorías canónicas hemos visto que determinados corchetes de Poisson de algunas magnitudes del campo electromagnético no se anulan, por lo que llevan asociado una incertidumbre en su medida cuando se miden simultáneamente

Para las componentes del campo eléctrico y magnético se verifica las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [E^i(\vec{x}_1, t_1), E^j(\vec{x}_2, t_2)] &= \frac{\hbar c}{V\epsilon_0} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{|\vec{k}|} \left(\frac{\delta^{ij}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \right) \sin(\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - c|\vec{k}|(t_1 - t_2)) \\ [B^i(\vec{x}_1, t_1), B^j(\vec{x}_2, t_2)] &= \frac{i\hbar}{V\epsilon_0 c} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{|\vec{k}|} \left(\frac{\delta^{ij}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \right) \sin(\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - c|\vec{k}|(t_1 - t_2)) \\ [E^i(\vec{x}_1, t_1), B^j(\vec{x}_2, t_2)] &= \frac{i\hbar}{V\epsilon_0} \sum_{\vec{k}, \sigma} \epsilon_{ijl} k^l \sin(\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - c|\vec{k}|(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

Vemos que las componentes del campo cuantizado no conmutan necesariamente. Por ejemplo será

$$[E^x(\vec{x}, t), B^y(\vec{x}', t)] = \frac{i\hbar}{\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial z} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

por lo que no es posible medir $\vec{E}$ y $\vec{B}$ simultáneamente en el mismo punto del espacio con una precisión absoluta. Los anteriores conmutadores se pueden escribir en función de $D(\vec{x}, t)$

$$D(\vec{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{|\vec{k}|} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - c|\vec{k}|t) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} (\delta(|\vec{x}| - ct) - \delta(|\vec{x}| + ct))$$

tomarán la expresión habitual

$$[E^i(\vec{x}_1, t_1), E^j(\vec{x}_2, t_2)] = \frac{i\hbar c}{\epsilon_0} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\delta^{ij}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \right) D(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2)$$

$$[B^i(\vec{x}_1, t_1), B^j(\vec{x}_2, t_2)] = \frac{i\hbar c}{\epsilon_0 c} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\delta^{ij}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \right) D(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2)$$

$$[E^i(\vec{x}_1, t_1), B^j(\vec{x}_2, t_2)] = \frac{i\hbar}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{\partial}{\partial x_1^j} D(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2)$$

570

Límite de validez de ecuaciones de Maxwell

Un análisis detallado muestra que las componentes del campo cuantizado solo conmutan para aquellos puntos que no están conectados por una señal de luz, y por tanto verifican la relación $|\vec{x} - \vec{x}'| > c|t - t'|$. Además, las perturbaciones se propagan en el campo cuantizado a la velocidad de la luz, por lo que se preserva el principio de causalidad de la teoría de la relatividad.

Si definimos en campo promedio en un volumen macroscópico $\Delta V = \Delta l^3$

$$\vec{E}_m = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{E} d^3x$$

se puede comprobar que en el estado fundamental del vacío

$$\langle \Phi_0 | \vec{E}_m^2 | \Phi_0 \rangle \sim \frac{\hbar c}{\epsilon_0 \Delta l^4}$$

lo que nos indica que hay una fluctuación del campo eléctrico incluso cuando no hay fotones presente. Si hay un campo de radiación con fotones presentes tampoco es

posible obtener valores precisos del campo eléctrico y magnético ya que hay fluctuaciones respecto a un valor medio de origen cuántico.

Puesto que la relación de conmutación de $b_{\vec{k},\sigma}^+$ y $b_{\vec{k},\sigma}$ es del orden la unidad y el número de fotones viene dado por $n_{\vec{k},\sigma} = b_{\vec{k},\sigma}^+ b_{\vec{k},\sigma}$, la fluctuación media de $b_{\vec{k},\sigma}^+$ y $b_{\vec{k},\sigma}$ será del orden de $\sqrt{n_{\vec{k},\sigma}}$ cuando el numero de fotones es grande, lo que corresponde con el límite de la descripción clásica manteniéndose el principio de correspondencia de Bohr.

Si λ es la longitud de onda de una onda electromagnética en la descripción clásica, el campo eléctrico promedio cuántico en un volumen $\Delta V = \lambda^3$

$$\epsilon_0 \langle \Phi_0 | \vec{E}_m^2 | \Phi_0 \rangle \sim \frac{\hbar c}{\lambda^4}$$

será igual a la densidad de energía del campo clásico

$$\epsilon_0 \vec{E}^2 = \mathcal{U} = \bar{n} \hbar \omega_{\vec{k}} = \bar{n} \frac{\hbar c}{\lambda}$$

si se verifica la condición del límite clásico $\bar{n} \gg 1/\lambda^3$, donde $\bar{n}$ es el número medio de fotones por unidad de volumen.

Por tanto, la descripción del electromagnetismo clásico representado por las ecuaciones de Maxwell tiene validez cuando hay un gran número de fotones en un volumen λ^3 . El campo electromagnético radiado por una emisora de radio típica de frecuencia modulada tiene del orden de 10^{17} fotones en un volumen λ^3 de su longitud de onda, lo que explica la validez del electromagnetismo clásico. Solo cuando hay esta alta densidad de fotones el número de ocupación puede considerarse como una variable continua espacial y es válida la descripción dada por las ecuaciones de Maxwell.

La electrodinámica clásica estudia las interacciones de las partículas cuando los efectos cuánticos son poco importantes y el número de fotones elevado, que al ser bosones forman estados coherentes que se comportan como las ecuaciones de Maxwell clásica, debido a que obedecen a relaciones de conmutación cuánticas con un límite clásico definido cuando la constante de Planck tiende a cero. Esto también tiene el efecto de que en la teoría cuántica, las interacciones sean producidas por intercambio de cuantos de fotones. Las partículas o cargas que son las fuentes, al ser sustituidas por un campo, que cuantizado da origen a los fotones que median la interacción, y los cuales tienen la propiedad de que se absorben y emiten durante el proceso de interacción entre las partículas cargadas, las cuales si conservan su identidad. Como el fotón es una partícula gauge, se le llama también bosón gauge.

Bases de la electrodinámica cuántica

Hemos visto en el capítulos de la teorías gauge, que las ecuaciones de Maxwell pueden deducirse tanto a partir de la mecánica clásica como de la mecánica cuántica no relativista, ya que a partir las integrales de camino de Feynman la mecánica clásica puede considerarse como un límite de la mecánica cuántica.

La evolución de la función de estado cuántica según el principio de Feynman viene dada por

$$\psi(\vec{x}, t) = \int K(\vec{x}, t; \vec{x}', t') \psi(\vec{x}', t') d^3 \vec{x}'$$

siendo $K(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ el propagador del punto $\vec{x}, t$ a $\vec{x}', t'$ que viene definido por

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \int_{\mathcal{D}^3 \vec{x}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t L(\vec{x}(t''), \vec{v}(t''), t'') dt''} \mathcal{D}^3 \vec{x}$$

Donde por $\mathcal{D}^3 \vec{x}$ se entiende que un sumatorio a la integral de todos los caminos posible entre $(\vec{x}(t), t)$ y $(\vec{x}'(t'), t')$. Si $L(\vec{x}(t''), \vec{v}(t''), t'')$ es la lagrangiana clásica de una partícula de carga q

$$L[\vec{x}(t), \vec{v}(t), t] = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}) - q\phi(\vec{x}, t) + q \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)$$

se puede comprobar tomando un tiempo $t' = t + \Delta t$ y desarrollando en serie la ecuación del propagador que la función de ondas antes definida verifica la ecuación de Schrödinger

$$H\psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

siendo el operador hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$

y donde $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ es el operador de momento.

Por tanto, el principio de Feynman engloba la mecánica cuántica.

En límite de la mecánica clásica cuando $\hbar/m \rightarrow 0$, la fase de integral del Kernell varía muy rápidamente y, por tanto, a la integral de Feynman solo contribuye el camino que hace estacionaria la fase, que corresponde a

$$\delta \int_{t'}^t L[\vec{x}(t''), \vec{v}(t''), t''] dt'' = 0$$

lo que nos reproduce la ley de Newton con la fuerza de Lorentz de la electrodinámica clásica

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) + q(\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Esto es análogo a la óptica, en que vimos que en el límite de las longitudes de onda cortas el campo se podía aproximar mediante la ikonal por

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{a}_0 \int e^{i(kS(\vec{x}) - \omega t)} d\vec{x} d\vec{y}$$

donde $\vec{\nabla} S(\vec{x})$ es tangente a la dirección de los rayos de luz predichos por la óptica geométrica. Como vimos, la integral es rápidamente oscilante y a la integral solo contribuyen aquellos caminos ópticos que se distancian en menos de una longitud de onda respecto de los rayos de luz geométricos, los cuales cumplen con el principio de Fermat como un límite.

Observemos que la anterior expresión es equivalente al principio de Huygens, en cada punto del espacio al que llega una onda se puede suponer como una fuente que genera nuevos frentes de ondas que parten de él. Existe por tanto, una analogía entre el principio de Feynman y el de Huyghens, aunque hay que entenderlo más bien en el sentido matemático que físico, ya que los espacios de las variables son diferentes. Esto se puede expresar de la forma diciendo que el Kernel tiene la propiedad de composición

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = K(\vec{x}, t; \vec{x}'', t'') K(\vec{x}'', t''; \vec{x}', t')$$

Esta propiedad es el núcleo de la mecánica cuántica que establece que las amplitudes de los procesos que no se pueden distinguir se suman.

Sin embargo, el que los caminos se puedan descomponer en pequeños intervalos $(\Delta \vec{x}, \Delta t)$ y luego sumarse se basa en tercer postulado de la relatividad de los relojes o de la cronometría.

Como en realidad la fase del integrando del propagador del Kernel es la acción S de la mecánica

$$S = \int_{t'}^t L[\vec{x}(t''), \vec{v}(t''), t''] dt''$$

Feynman generalizó su principio y supuso que la lagrangiana correcta para determinar el propagador corresponde a la lagrangiana de Dirac de la que se deriva la ecuación cuántica relativista

$$L = \hbar c \bar{\psi} \left(i \gamma^\alpha D_\alpha - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi - q \bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi - \frac{\epsilon_0}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

Los significados del campo electromagnético

En base a esta hipótesis Feynman construyó toda su teoría de la electrodinámica cuántica.

El tensor de energía momento en este caso vendría dado por la suma del tensor del campo electromagnético libre $T_c^{\alpha\beta}$ y una contribución de la energía de interacción

$$T^{\alpha\beta} = T_c^{\alpha\beta} + \frac{\hbar c}{2i} \gamma^\alpha (\bar{\psi} \partial^\beta \psi - \psi \partial^\beta \bar{\psi})$$

El término de interacción no es lineal pues depende de la función de ondas que a su vez viene determinada por la ecuación de Dirac. La resolución iterativa de estas ecuaciones mediante los diagramas ideados por Feynman, es el fundamento de la electrodinámica cuántica.

Es importante destacar que el principio de Feynman no es un principio variacional sino que es un tipo de teoría mucho mas general.

En el caso no relativista o cuando los campos varían con suficiente lentitud, es cuando emergen los principios variacionales de la mecánica como una consecuencia de la teoría de Feynman.

El cálculo del propagador no se puede calcular analíticamente y se debe hacer mediante un cálculo de perturbaciones mediante un desarrollo en potencias de la constante de estructura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{2\hbar c \epsilon_0} = \frac{1}{137.039}$$

Según el desarrollo de la teoría de Feynman, los fotones se pueden encontrar en distintos estados de polarización (X,Y,Z,T). Cuando un fotón recorre una distancia grande, según el propagador parece ir a la velocidad de la luz y las amplitudes de los términos Z y T se cancelan.

Para fotones virtuales que van de un protón a un electrón en un átomo, es la componente T la más importante, lo que hace que la ley de Coulomb sea debida a un intercambio de momento a través de fotones virtuales entre partículas cargadas.

Del acoplamiento de los electrones con los cuatro estados de los fotones surgen los potenciales electromagnéticos escalar y vectorial. Cuando el campo eléctrico y magnético cambian con suficiente lentitud, la contribución más importante a la amplitud de probabilidad de los fotones y electrones proviene de los caminos predichos por la óptica geométrica y la mecánica de Newton.

Todo esto hace que la luz y los electrones parezca que siguen una línea recta en el vacío, y es cuando emergen los principios variacionales de la física clásica.